Analisi Matematica II e Complementi di Matematica
INGEGNERIA INFORMATICA-AUTOMATICA

Cognome e nome: ______________________________

Corso di Laurea: ______________________________

Matricola: ____________________

Prova intermedia del 22 aprile 2008, A.A. 2007/08

Esercizio 1

Dopo aver giustificato l'esistenza del massimo e del minimo assoluti della funzione

$$f(x, y, z) = x + y + z$$

sull'insieme

$$\mathcal{V} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\right\},$$

determinare tali valori.

Esercizio 2

Studiare il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = e^y(t^2 + 1) \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Esercizio 3 (NON CORRETTO)

Mediante la trasformata di Laplace risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - 3y' + 2y = 2\cos(2t) \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = -1. \end{cases}$$

Esercizio 4 (NON CORRETTO)

Mediante il teorema dei residui calcolare l'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2 + x + 1}\, dx.$$

Correzione prova scritta intermedia del 22/4/08

ANALISI MATEMATICA II E COMPLEMENTI DI MATEMATICA

ESERCIZIO 1

Il vincolo V è la sfera piena e chiusa: si tratta di un chiuso e limitato.
Poichè la f è una funzione continua per il teorema di Weierstrass ammetterà massimo e minimo assoluto su V.
Risulta poi $f \in C^{\infty}(\mathbb{R}^3)$. Inoltre
$\nabla f(x,y,z) = (1,1,1)^T \neq 0$. Pertanto i punti di massimo e minimo per f su V si trovano sul bordo,

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 1\}.$$

Trattandosi di una sfera ed essendo ∇f costante, utilizzando il teorema di Lagrange i punti di massimo e minimo assoluto si individuano cercando l'intersezione tra la retta

$$\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$$

e la sfera: si ha $t^2+t^2+t^2 = 1$, ovvero $3t^2 = 1$, cioè $t = \mp\frac{\sqrt{3}}{3}$

Abbiamo pertanto le due sole soluzioni

$$A = \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \quad e \quad B = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

sui quali la f vale

$$f(A) = -\sqrt{3} \quad e \quad f(B) = +\sqrt{3}$$

che risultano rispettivamente minimo e massimo assoluto.

ESERCIZIO 2

La funzione $f(t,y) = e^{y}(t^2+1)$ è $C^{\infty}(\mathbb{R}^2)$, pertanto vale il teorema di esistenza ed unicità locale non solo in $(0,0)$ ma in qualunque punto del piano (t,y).

L'equazione è a variabili separabili. Non vi sono soluzioni stazionarie, non vale il teorema di esistenza globale.

Risulta $f(t,y) > 0 \quad \forall (t,y) \in \mathbb{R}^2$, per cui le soluzioni dell'equazione differenziale (e quindi del problema di Cauchy) sono strettamente positive.

Proseguendo per separazioni di variabili si ha

$$\int_0^{y(t)} e^{-s}\, ds = \int_0^t (s^2+1)\, ds \qquad \text{ovvero}$$

$$-e^{-s}\Big|_{s=0}^{s=y(t)} = \frac{1}{3}s^3 + s \Big|_{s=0}^{s=t}$$

$$-e^{-y(t)} + 1 = \frac{1}{3}t^3 + t$$

$$e^{-y(t)} = 1 - t - \frac{1}{3}t^3 \qquad (*)$$

La funzione e^{-s} ha codominio la semiretta $(0,+\infty)$.
Bisogna perciò imporre $h(t) = 1 - t - \frac{1}{3}t^3 > 0$.
Risulta $h(0) = 1$, $\lim_{t \to \infty} h(t) = -\infty$,
$h'(t) = -1 - t^2 < 0$.

Si ha poi $h(1) = 1 - 1 - \frac{1}{3} = -\frac{1}{3} < 0$

Perciò $\exists!\, t^* \in (0,1)$ t.c. $h(t^*) = 0$.

Invertendo la $(*)$ si ha

$$-y(t) = \log\left(1 - t - \frac{1}{3}t^3\right),$$

ovvero

$$y(t) = -\log\left(1 - t - \frac{1}{3}t^3\right)$$

definita nell'intervallo massimale

$$t < t^*.$$

Analisi Matematica II (8 cfu)

Prova intermedia del 22 aprile 2008, A.A. 2007/08

Cognome e nome: ______________________________

Corso di Laurea: ______________________________

Matricola: ____________________

turno 9:00 - 10:00

Esercizio 1

Trovare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y''' - 4y'' - 7y' + 10y = t^3 - 4t^2 - 7t + 10.$$

Esercizio 2

Dato il luogo di zeri

$$\log(1 + \sin^2(x + y)) + \arctan(y) + x^2 + y^2 = 0,$$

dire se in un intorno dell'origine è possibile esplicitare y in funzione della x e nel caso affermativo trovare tale esplicitazione a meno di $o(x^3)$.

Correzione prova scritta intermedia del 22/4/08

ANALISI MATEMATICA II (8 CFU) – turno 9:00–10:00

ESERCIZIO 1

Si tratta di un'equazioni differenziale lineare del 3° ordine non omogenea.

L'omogenea associata $y''' - 4y'' - 7y' + 10y = 0$ ha polinomio caratteristico

$$\lambda^3 - 4\lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0,$$

le cui soluzioni sono

$\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 5$, $\lambda_3 = -2$

ognuna con molteplicità 1.

	1	-4	-7	10
1		1	-3	-10
	1	-3	-10	
5		5	10	
	1	2		

La soluzione generale dell'omogenea associata è

$$y(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{t} + c_3 e^{5t}, \qquad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

Passando alla non omogenea, poiché $\lambda = 0$ non è soluzione del polinomio caratteristico, facendo uso del metodo delle funzioni simili, si tenterà di ricercare ~~una~~ soluzione particolare del tipo

$\bar{y}(t) = \alpha t^3 + \beta t^2 + \gamma t + \delta$. Derivando risulta:

$\bar{y}'(t) = 3\alpha t^2 + 2\beta t + \gamma$,

$\bar{y}''(t) = 6\alpha t + 2\beta$,

$\bar{y}'''(t) = 6\alpha$ e sostituendo nell'equazione non omogenea si ottiene

$$6\alpha - 4(6\alpha t + 2\beta) - 7(3\alpha t^2 + 2\beta t + \gamma) + 10(\alpha t^3 + \beta t^2 + \gamma t + \delta) = t^3 - 4t^2 - 7t + 10$$

da cui si ottiene il sistema lineare

$$\begin{cases} 6\alpha - 8\beta - 7\gamma + 10\delta = 10 \\ 24\alpha - 14\beta + 10\gamma = -7 \\ -21\alpha + 10\beta = -4 \\ 10\alpha = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha = \frac{1}{10} \\ \beta = -\frac{19}{100} \\ \gamma = -\frac{1206}{1000} \\ \delta = -\frac{5962}{10000} \end{cases}$$

La soluzione generale è data dunque da

$$y(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{t} + c_3 e^{5t} + \frac{1}{10} t^3 - \frac{19}{100} t^2 - \frac{1206}{1000} t - \frac{5962}{10000}$$

ESERCIZIO 2

La funzione posta uguale a zero nell'intorno dell'origine è di classe C^∞ (in realtà lo sono su tutto $\mathbb{R}^2$).

Teniamo conto che si ha

$$\log(1+t) = t - \frac{1}{2}t^2 + o(t^2)$$
$$\operatorname{sen}(t) = t + o(t^2)$$
$$\operatorname{arctg}(t) = t - \frac{1}{3}t^3 + o(t^4)$$

Sviluppiamo l'equazione ~~della~~ del luogo di zeri fino al terzo ordine:

$$\operatorname{sen}^2(x+y) - \frac{1}{2}\operatorname{sen}^4(x+y) + o\left((x+y)^4\right) + y - \frac{1}{3}y^3 + o(y^4) + x^2 + y^2 = 0,$$

ovvero

$$\left((x+y) + o\left((x+y)^2\right)\right)^2 + o\left((x+y)^3\right) + y - \frac{1}{3}y^3 + o(y^3) + x^2 + y^2 = 0,$$

$$(x+y)^2 + o(x+y)^3 + y - \frac{1}{3}y^3 + o(y^3) + x^2 + y^2 = 0,$$

$$\boxed{2x^2 + 2xy + 2y^2 + y - \frac{1}{3}y^3 + o(x^3) + o(y^3) = 0} \quad (*)$$

Approssimando al primo ordine si ottiene

$y + o(y) = o(x)$ da cui si deduce che è solo possibile esplicitare la y in funzione della x.

Passando agli infinitesimi si ottiene: $o(y) = o(x)$, da cui $\boxed{y = o(x)}$, che è lo sviluppo al 1° ordine.

Consideriamo ora la $(*)$ approssimata al 2° ordine

$$2x^2 + 2xy + 2y^2 + y + o(x^2) + o(y^2) = 0.$$

Sostituendo lo sviluppo al 1° ordine si ottiene

$2x^2 + y + o(x^2) = 0$, da cui

$y = -2x^2 + o(x^2)$, che è lo sviluppo al 2° ordine.

Utilizzando tale sviluppo nella $(*)$ si ha

$2x^2 + 2x(-2x^2 + o(x^2)) + y + o(x^3) = 0$, da cui

$2x^2 - 4x^3 + y + o(x^3) = 0$, ovvero

$y = -2x^2 + 4x^3 + o(x^3)$, che è lo sviluppo al 3° ordine richiesto.

Analisi Matematica II (8 CFU)
Prova intermedia del 22 aprile 2008, A.A. 2007/08

Cognome e nome: ______________________________

Corso di Laurea: ______________________________

Matricola: ____________________

turno 10:45 - 11:45, versione A

Esercizio 1

Trovare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y'' + 8y' + 7y = e^{-t} + te^{-7t}$$

Esercizio 2

Dato il luogo di zeri

$$\begin{cases} \sin(x+y) + \sin(x-y) + z^2 - y^2 = 0 \\ e^{x^2 y} - x\sin(xy) - 1 + z = 0, \end{cases}$$

dire se in un intorno dell'origine è possibile esplicitare due variabili in funzione della terza. Nel caso affermativo, dopo aver scelto quale coppia di variabili esplicitare, trovare lo sviluppo di Taylor dell'esplicitazione fino al terzo ordine.

Correzione prova scritta intermedia del 22/4/08

ANALISI MATEMATICA II (8 CFU) – turno 10:45-11:45, VERSIONE A.

ESERCIZIO 1.

Si tratta di un'equazione differenziale lineare del 2° ordine non omogenea.

L'omogenea associata $y''+8y'+7y=0$ ha polinomio caratteristico $\lambda^2+8\lambda+7=0$,

da cui $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=-7$, con molteplicità uno.

La soluzione generale dell'omogenea associata è

$y(t)=c_1 e^{-t}+c_2 e^{-7t}$, $\quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Passando alla non omogenea, poiché e^{-t} ed e^{-7t} sono soluzioni per l'omogenea associata, facendo uso del

a) metodo delle funzioni simili;

b) principio di sovrapposizione;

si tratterà di ricercare soluzioni particolari del tipo

$\bar{y}(t)=\alpha t e^{-t}+\beta t^2 e^{-7t}+\gamma t\, e^{-7t}$,

dove si è tenuto conto del fatto che $\lambda_1=-1$ e $\lambda_2=-7$ hanno molteplicità uno. Derivando risulta:

$$\bar{y}'(t)=\alpha e^{-t}+2\beta t\, e^{-7t}+\gamma e^{-7t}-\alpha t\, e^{-t}-7\beta t^2 e^{-7t}-7\gamma t e^{-7t}$$

$$=\alpha e^{-t}-\alpha t e^{-t}+\gamma e^{-7t}+(2\beta-7\gamma)\, t e^{-7t}-7\beta t^2 e^{-7t}$$

$$\bar{y}''(t)=-\alpha e^{-t}-\alpha e^{-t}+\alpha t e^{-t}-7\gamma e^{-7t}+(2\beta-7\gamma)e^{-7t}+$$

$$-7(2\beta-7\gamma)\,t e^{-7t}-14\beta t e^{-7t}+49\beta t^2 e^{-7t}=$$
$$=-2\alpha e^{-t}+(2\beta-14\gamma)e^{-7t}+\alpha t e^{-t}+(-28\beta+49\gamma)\,t e^{-7t}+$$
$$+49\beta t^2 e^{-7t}$$

e sostituendo nell'equazione

$$-2\alpha e^{-t}+2\beta e^{-7t}-14\gamma e^{-7t}\cancel{+\alpha t e^{-t}}-28\beta t e^{-7t}\cancel{+49\gamma t e^{-7t}}$$
$$\cancel{+49\beta t^2 e^{-7t}}+8\alpha e^{-t}\cancel{-8\alpha t e^{-t}}+16\beta t e^{-7t}\cancel{-56\beta t^2 e^{-7t}}$$
$$+8\gamma e^{-7t}\cancel{-56\gamma t e^{-7t}}\cancel{+7\alpha t e^{-t}}\cancel{+7\beta t^2 e^{-7t}}\cancel{+7\gamma t e^{-7t}}=$$
$$=e^{-t}+t e^{-7t}$$

da cui

$$6\alpha e^{-t}+2\beta e^{-7t}-12\beta t e^{-7t}-6\gamma e^{-7t}=e^{-t}+t e^{-7t}$$

Otteniamo perciò il sistema lineare

$$\begin{cases}6\alpha=1\\ 2\beta-6\gamma=0\\ -12\beta=1\end{cases}\qquad\begin{cases}\alpha=1/6\\ \gamma=-1/36\\ \beta=-1/12\end{cases}$$

La soluzione generale è data dunque da

$$y(t)=c_1 e^{-t}+c_2 e^{-7t}+\frac{1}{6}t e^{-t}-\frac{1}{12}t^2 e^{-7t}-\frac{1}{36}t e^{-7t}$$

ESERCIZIO 2

Le funzioni coinvolte nell'intorno dell'origine sono tutte C^∞.
Teniamo conto che si ha

$$\begin{cases} \operatorname{sen} t = t - \frac{1}{6}t^3 + o(t^3) \\ e^t = 1 + t + o(t). \end{cases}$$

Sviluppiamo nelle due equazioni del sistema fino al terzo ordine si ha

$$\begin{cases} (x+y) - \frac{1}{6}(x+y)^3 + o(x+y)^3 + (x-y) - \frac{1}{6}(x-y)^3 + o(x-y)^3 + \\ \qquad + z^2 - y^2 = 0 \\ \cancel{1} + x^2y + o(x^2y) - x\left(xy + o(x^2y^2)\right) \cancel{-1} + z = 0 \end{cases}$$

che si riordina come

$$\begin{cases} 2x - \frac{1}{6}(x+y)^3 - \frac{1}{6}(x-y)^3 + z^2 - y^2 + o(x^3) + o(y^3) = 0 \\ z + o(x^2y) = 0 \end{cases} \quad (*)$$

La matrice Jacobiana delle funzioni del sistema valutata nell'origine ci dà quindi

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

L'unico minore 2×2 invertibile è quello relativo a 1^e e 3^e colonna.

Possiamo perciò solo esplicitare $\begin{cases} x = x(y) \\ z = z(y) \end{cases}$

Cerchiamo tale sviluppo al $3°$ ordine. Tornando al sistema $(*)$ e troncando l'approssimazione al $1°$ ordine si ha:

$$\begin{cases} 2x + o(x) + o(y) + o(z) = 0 \\ z = o(y) \end{cases}$$

Sostituendo la 2ª nella 1ª:

$$\begin{cases} 2x + o(x) + o(y) = 0 \\ z = o(y) \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x + o(x) = o(y) \\ z = o(y) \end{cases}$$

e dalla prima passando agli infinitesimi si ha

$o(2x + o(x)) = o(y)$ ossia $o(x) = o(y)$.

Sostituendo nel sistema si ottiene

$$\begin{cases} 2x = o(y) \\ z = o(y) \end{cases}$$ ovvero l'approssimazione al 1° ordine

$$\begin{cases} x = o(y) \\ z = o(y) \end{cases} \qquad (1)$$

Tornando adesso al sistema (*) e usando la relazione $x = o(y)$ si ottiene

$$\begin{cases} 2x - \frac{1}{6}(y + o(y))^3 + \frac{1}{6}(y + o(y))^3 + o(y^6) - y^2 + o(y^3) = 0 \\ z = o(y^3) \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} 2x - \cancel{\frac{1}{6}(y^3)} + o(y^3) + \cancel{\frac{1}{6}(y^3)} - y^2 = 0 \\ z = o(y^3) \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} y^2 + o(y^3) \\ z = o(y^3) \end{cases}$$

che è lo sviluppo al 3° ordine richiesto.

Si noti che la semplicità del sistema ci ha permesso il passaggio dallo sviluppo del 1° ordine a quello del 3° senza passare per lo step intermedio dello sviluppo al 2° ordine.

NON CORRETTO

Analisi Matematica II (8 cfu)
Prova intermedia del 22 aprile 2008, A.A. 2007/08

Cognome e nome: ______________________________

Corso di Laurea: ______________________________

Matricola: ____________________

turno 10:45 - 11:45, versione B

Esercizio 1

Trovare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y'' + 7y' + 10y = e^{-2t} + te^{-5t}$$

Esercizio 2

Dato il luogo di zeri

$$\begin{cases} \sin(x+y) - \sin(y-x) + z^2 - x^2 = 0 \\ e^{xy^2} - y\sin(xy) - 1 + z = 0, \end{cases}$$

dire se in un intorno dell'origine è possibile esplicitare due variabili in funzione della terza. Nel caso affermativo, dopo aver scelto quale coppia di variabili esplicitare, trovare lo sviluppo di Taylor dell'esplicitazione fino al terzo ordine.

Analisi Matematica II (8 cfu)
Prova intermedia del 22 aprile 2008, A.A. 2007/08

Cognome e nome: ______________________________

Corso di Laurea: ______________________________

Matricola: ____________________

turno 12 - 13, versione B

Esercizio 1

Dopo aver giustificato l'esistenza del massimo e del minimo assoluti della funzione

$$f(x,y) = x^2 + y^2$$

sull'insieme

$$\mathcal{V} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + (y-1)^2 \leq 4, \ \ x^2 + (y+1)^2 \leq 4\},$$

determinare tali valori.

Esercizio 2

Studiare il problema di Cauchy

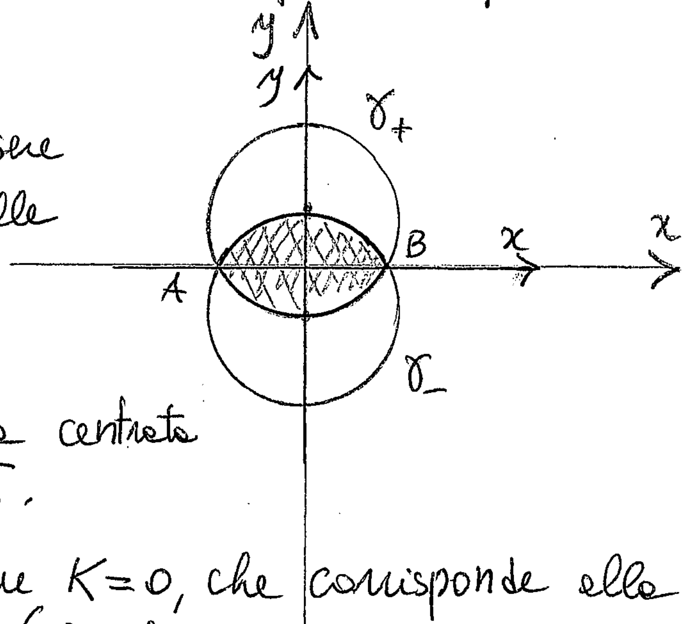
$$\begin{cases} y' = t\cos(t)(y^2+1) \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Correzione prova scritta intermedia del 22/4/08

ANALISI MATEMATICA II (8 CFU) – turno 12:00-13:00, versione B

ESERCIZIO 1

La funzione $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$. Il vincolo V, come intersezione tra due cerchi chiusi, è un dominio chiuso e limitato. Per il teorema di Weierstrass, dunque, esistono il massimo e minimo assoluti della funzione f sul dominio V.



L'esercizio può facilmente essere risolto mediante il metodo delle curve di livello:

$$x^2+y^2=K,$$

$\forall K \geq 0$, è una circonferenza centrata nell'origine e di raggio $\sqrt{K}$.

Il minimo assoluto è dunque $K=0$, che corrisponde alla circonferenza di raggio nullo (la funzione è ovunque non negativa) che si raggiunge perciò in $O=(0,0)$.

Il massimo assoluto si ottiene per la circonferenza che passa per A e B. Tali punti si ottengono intersecando una delle due circonferenze $\gamma_\pm$ con l'asse delle x:

$$x^2+1=4, \quad x^2=3 \quad \Rightarrow \quad x=\mp\sqrt{3}.$$

Dunque si ha $K=3+0$, ovvero il massimo assoluto è $K=3$ che si raggiunge in $A=(-\sqrt{3},0)$ e $B=(\sqrt{3},0)$.

ESERCIZIO 2

La funzione $f(t,y) = t\cos(t)(y^2+1)$ è $C^\infty(\mathbb{R}^2)$, pertanto vale il teorema di esistenza ed unicità locale non solo in $(0,1)$ ma in qualunque punto del piano (t,y).

L'equazione è a variabili separabili. Non vi sono soluzioni stazionarie, non vale il teorema di esistenza globale e la f non ha segno fissato su tutto $\mathbb{R}^2$.

Procediamo con il metodo di separazione delle variabili.

$$\int_1^{y(t)} \frac{ds}{s^2+1} \quad \int_0^t s\cos(s)\,ds = s\,\mathrm{sen}(s) + \cos(s)\Big|_{s=0}^{s=t}$$

$$\mathrm{arctg}(y(t)) - \mathrm{arctg}(1) = t\,\mathrm{sen}(t) + \cos(t) - 1$$

$$\mathrm{arctg}(y(t)) = t\,\mathrm{sen}(t) + \cos(t) + \frac{\pi}{4} - 1 \qquad (*)$$

Il codominio della funzione arctg è l'intervallo aperto $(-\pi/2, \pi/2)$, per cui bisogna imporre

$$-\frac{\pi}{2} < t\,\mathrm{sen}(t) + \cos(t) + \frac{\pi}{4} - 1 < \frac{\pi}{2}$$

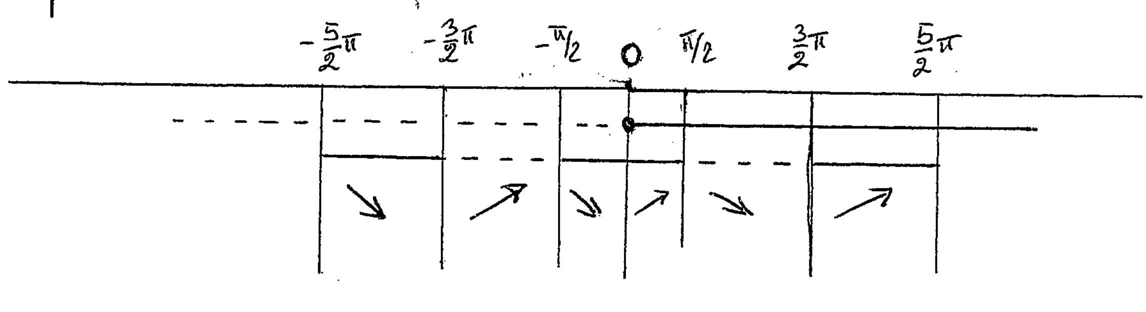
da cui

$$1 - \frac{3}{4}\pi < t\,\mathrm{sen}(t) + \cos(t) < 1 + \frac{\pi}{4}$$

Si tratta di studiare la funzione $h(t) = t\,\mathrm{sen}\,t + \cos t$.

$$h'(t) = \cancel{\mathrm{sen}\,t} + t\cos t - \cancel{\mathrm{sen}\,t} = t\cos t$$

Risulta perciò $h'(t) \geq 0$ per

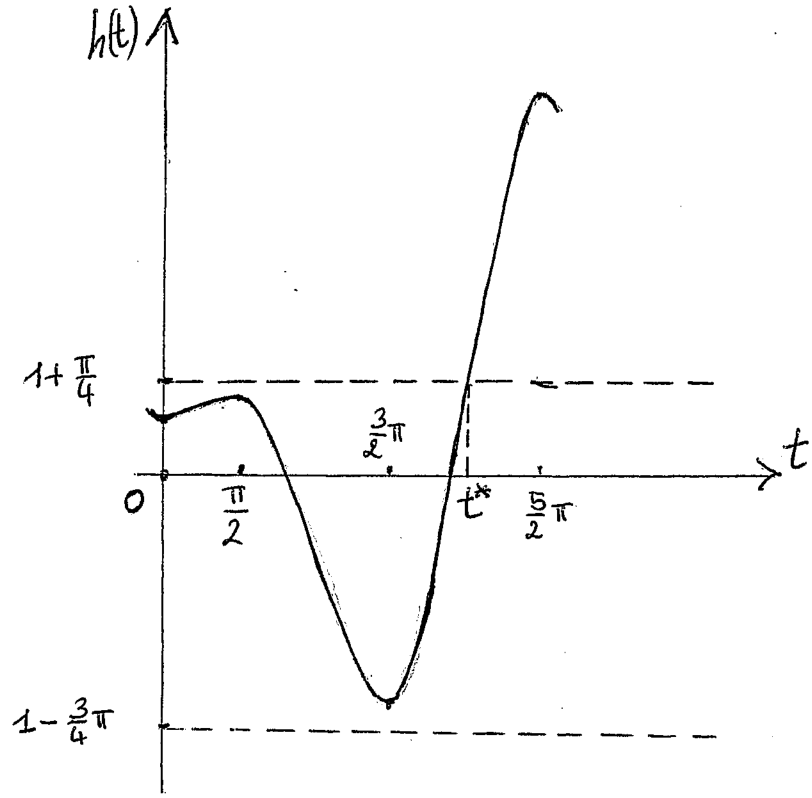


La funzione h è pari, per cui basta studiarla per $t \geq 0$.
Si ha, per $k \geq 0$,

$h(0) = 1$

$h\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ punti di massimo relativo

$h\left(\frac{3}{2}\pi + 2k\pi\right) = -\left(\frac{3}{2}\pi + 2k\pi\right)$ punti di minimo relativo.



L'intervallo massimale è dunque $(-t^*, t^*)$, dove $t^* \in \left(\frac{3}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi\right)$ è individuato graficamente.

Invertendo la (*) si ha la soluzione del problema

$$y(t) = \operatorname{tg}\left(t \operatorname{sen} t + \cos t + \frac{\pi}{4} - 1\right)$$

per $t \in (-t^*, t^*)$.

NON CORRETTO

Analisi Matematica II (8 cfu)
Prova intermedia del 22 aprile 2008, A.A. 2007/08

Cognome e nome: ______________________________

Corso di Laurea: ______________________________

Matricola: ____________________

turno 12 - 13, versione A

Esercizio 1

Dopo aver giustificato l'esistenza del massimo e del minimo assoluti della funzione

$$f(x,y) = x^2 + y^2$$

sull'insieme

$$\mathcal{V} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ (x-1)^2 + y^2 \leq 4, \ \ (x+1)^2 + y^2 \leq 4\right\},$$

determinare tali valori.

Esercizio 2

Studiare il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = t\sin(t)(y^2+1) \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Analisi Matematica II (8 cfu)
Prova intermedia del 22 aprile 2008, A.A. 2007/08

Cognome e nome: ______________________

Corso di Laurea: ______________________

Matricola: ______________

turno 14:45 - 15:45

Esercizio 1

Calcolare la distanza dell'origine $O = (0,0,0)$ dal paraboloide

$$\mathcal{P} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; z = 1 - x^2 - y^2\right\}.$$

Esercizio 2

Studiare il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \cos^2(y)\log(1+t^2) \\ y(1) = 0. \end{cases}$$

Correzione prova scritta intermedia del 22/4/08
ANALISI MATEMATICA II (8 CFU) – turno 14:45–15:45

ESERCIZIO 1

Ricordiamo che è possibile parametrizzare il paraboloide dato come

$$\begin{cases} x = \rho\cos\vartheta \\ y = \rho\,\mathrm{sen}\,\vartheta \\ z = 1-\rho^2 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} \vartheta\in[0,2\pi] \\ \rho \geq 0 \end{array}$$

La distanza del generico punto (x,y,z) sul paraboloide dall'origine è definita come

$$d = \sqrt{\rho^2\cos^2\vartheta + \rho^2\mathrm{sen}^2\vartheta + (1-\rho^2)^2} =$$

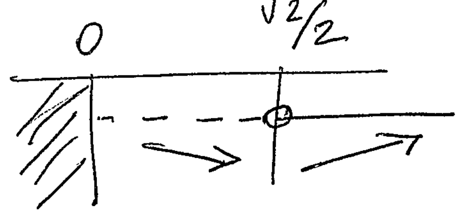
$$= \sqrt{\rho^2 + 1 - 2\rho^2 + \rho^4} = \sqrt{1-\rho^2+\rho^4}$$

Tale distanza è indipendente da ϑ per ragioni di simmetria. Si tratta perciò di minimizzare la funzione (conviene per semplicità nei calcoli passare a d^2):

$$f(\rho) = 1-\rho^2+\rho^4, \qquad \rho \geq 0.$$

$$f'(\rho) = -2\rho + 4\rho^3 = 2\rho(2\rho^2-1) \geq 0 \text{ per } \rho \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Il minimo si ha per $\rho = \frac{\sqrt{2}}{2}$



Risulta

$$d = \sqrt{1-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

che è la distanza cercata.

ESERCIZIO 2

La funzione $f(t,y) = \cos^2(y)\log(1+t^2)$ è $C^\infty(\mathbb{R}^2)$, pertanto vale il teorema di esistenza ed unicità locale non solo in $(1,0)$ ma in qualunque punto del piano (t,y).

A voler essere precisi si potrebbe poi applicare il teorema di esistenza ed unicità GLOBALE per concludere che la soluzione è definita su tutto $\mathbb{R}$ visto che

$$|f(t,y)| \leq \log(1+t^2) \qquad \forall (t,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Risulta poi $f(t,y) = 0$ per $y = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Le costanti trovate sono soluzioni stazionarie dell'equazione.

Poichè il dato è fissato in $y_0 = 0$, la soluzione (in base all'unicità) non potrà attraversare le rette $y = \mp \pi/2$ e pertanto risulterà

$$-\frac{\pi}{2} \leq y(t) \leq \frac{\pi}{2} \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Visto che l'equazione ha $y' = f(t,y) \geq 0 \quad \forall (t,y) \in \mathbb{R}^2$, la soluzione sarà anche monotona crescente.

Il problema può essere risolto per separazione di variabili:

$$\int_0^{y(t)} \frac{dz}{\cos^2 z} = \int_1^t \log(1+s^2)\,ds = s\log(1+s^2)\Big|_1^t - \int_1^t \frac{2s^2\,ds}{1+s^2}$$

$$tg(y(t)) = t\log(1+t^2) - \log(2) - 2\int_1^t \left(1 - \frac{1}{1+s^2}\right)ds$$

$$tg(y(t)) = t\log(1+t^2) - \log(2) - (2s - 2\,arctg\, s)\Big|_{s=1}^{s=t}$$

$$tg(y(t)) = t\log(1+t^2) - \log(2) - 2t + 2 + 2\,arctg(t) - 2\frac{\pi}{4}$$

$$y(t) = arctg\left[t\log(1+t^2) - 2t + 2\,arctg(t) - \log(2) - \frac{\pi}{2} + 2\right], \ \forall t \in \mathbb{R}$$

I passaggi che hanno portato alla soluzione hanno sfruttato la monotonia della tg e della sua inversa nonché il fatto che il codominio della tg è tutta la retta reale.

Risulta

$$\lim_{t\to-\infty} y(t) = -\frac{\pi}{2}, \quad \lim_{t\to+\infty} y(t) = +\frac{\pi}{2},$$

ossia la soluzione trovata risulta asintotica alle soluzioni stazionarie che la delimitano.