Prova intermedia di Analisi Matematica II

Docente: B. Rubino

L'Aquila, 26 febbraio 2007

Cognome e nome: ____________________________

Matricola: ____________________________

Corso di studi: ____________________________

Tempo a disposizione: 75 minuti

Esercizio 1

Data la funzione $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definita come

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{per } (x,y) \neq (0,0), \\ \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

1. si stabilisca in quali punti di $\mathbb{R}^2$ è continua,
2. se ne studi la differenziabilità nell'origine.

Esercizio 2

Studiare il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = e^{-t}(1+y^2) \\ \\ y(0) = 0, \end{cases}$$

determinando in particolare l'intervallo massimale di esistenza per la soluzione trovata.

Esercizio 3

Data la funzione $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definita come

$$f(x,y) = \max(x^2,\ y^2),$$

se ne stabilisca il massimo ed il minimo assoluto sul dominio

$$\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ |x-2y| \leq 1,\ |2x+y| \leq 1\right\}.$$

Correzione prova scritta di ANALISI MATEMATICA II
del 26/2/07 (prova intermedia) – B. RUBINO

ESERCIZIO 1. La funzione è, fuori dall'origine, rapporto di due funzioni $C^\infty(\mathbb{R}^2)$ e il denominatore si annulla solo nell'origine (dove la funzione è definita però diversamente). Di conseguenza, fuori dall'origine, la f è di classe C^1, per cui continua e differenziabile. Resta perciò da controllare solo l'origine.
Riguardo alla continuità, si tratta di calcolare il

$$\lim_{(x,y)\to 0} \frac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} =$$

passando in coordinate polari, $\begin{cases} x=\rho\cos\vartheta & \rho\geq 0 \\ y=\rho\,\mathrm{sen}\,\vartheta & \vartheta\in[0,2\pi) \end{cases}$

$$= \lim_{\rho\to 0^+} \frac{\rho^2(\cos^2\vartheta-\mathrm{sen}^2\vartheta)}{\rho} = \lim_{\rho\to 0^+} \rho\left(\cos^2\vartheta-\mathrm{sen}^2\vartheta\right)=0,$$

in quanto prodotto di una funzione continua e limitata in ϑ per una infinitesima in ρ. Poiché il limite coincide con il valore $f(0,0)$, la funzione è continua.

Per studiare la differenziabilità nell'origine, calcoliamo intanto le derivate parziali in $(0,0)$.

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t^2}{t\sqrt{t^2}} = \lim_{t\to 0} \frac{t}{|t|}$$

Tale limite non esiste, poiché $\lim_{t\to 0^-} \frac{t}{|t|} = -1$, $\lim_{t\to 0^+} \frac{t}{|t|} = 1$.

Poichè se f è differenziabile in P allora f ammette in P tutte le derivate direzionali, possiamo concludere che f NON è differenziabile in $(0,0)$.

<u>ESERCIZIO 2</u>. Si tratta del problema di Cauchy relativo ad un'equazione differenziale del 1° ordine non lineare a variabili separabili. Il secondo membro,
$f(t,y) = e^{-t}(1+y^2)$ è $C^1(\mathbb{R}^2)$ per cui è assicurata esistenza ed unicità locale. Inoltre $f(t,y) > 0 \ \forall (t,y) \in \mathbb{R}^2$, che equivale a dire che

a) non vi sono soluzioni stazionarie dell'equazione;

b) la soluzione sarà strettamente monotone crescente in tutto l'intervallo massimale di esistenza.

~~Integrando per parti~~ separando le variabili e integrando si ha

$$\frac{y'(t)}{1+y^2(t)} = e^{-t}$$

$$\int_0^{y(t)} \frac{dz}{1+z^2} = \int_0^t e^{-s}\,ds$$

$$\operatorname{arctg}(y(t)) = -e^{-t}+1, \quad \text{da cui} \quad -\frac{\pi}{2} < -e^{-t}+1 < \frac{\pi}{2}$$

e, tenuto conto dell'invertibilità della funzione arctg,

$$y(t) = \operatorname{tg}\left(1-e^{-t}\right),$$ con $t \in \mathbb{R}$ che soddisfa la disequazione $1-\frac{\pi}{2} < e^{-t} < \frac{\pi}{2}+1$

Poichè $e^{-t} > 0 \ \forall t \in \mathbb{R}$, la disegueglianza a sinistra è superflua visto che $1 - \frac{\pi}{2} < 0$.

Perciò l'intervallo massimale è dato dalle soluzioni della disequazione

$$e^{-t} < \frac{\pi}{2} + 1 ,$$

ovvero

$$-t < \log\left(1 + \frac{\pi}{2}\right), \quad \text{da cui} \quad t > -\log\left(1 + \frac{\pi}{2}\right).$$

Abbiamo poi

$$\lim_{t \to \left(-\log\left(1+\frac{\pi}{2}\right)\right)^+} \mathrm{tg}\left(1 - e^{-t}\right) = -\infty, \quad \lim_{t \to \infty} \mathrm{tg}\left(1 - e^{-t}\right) = \mathrm{tg}(1)$$

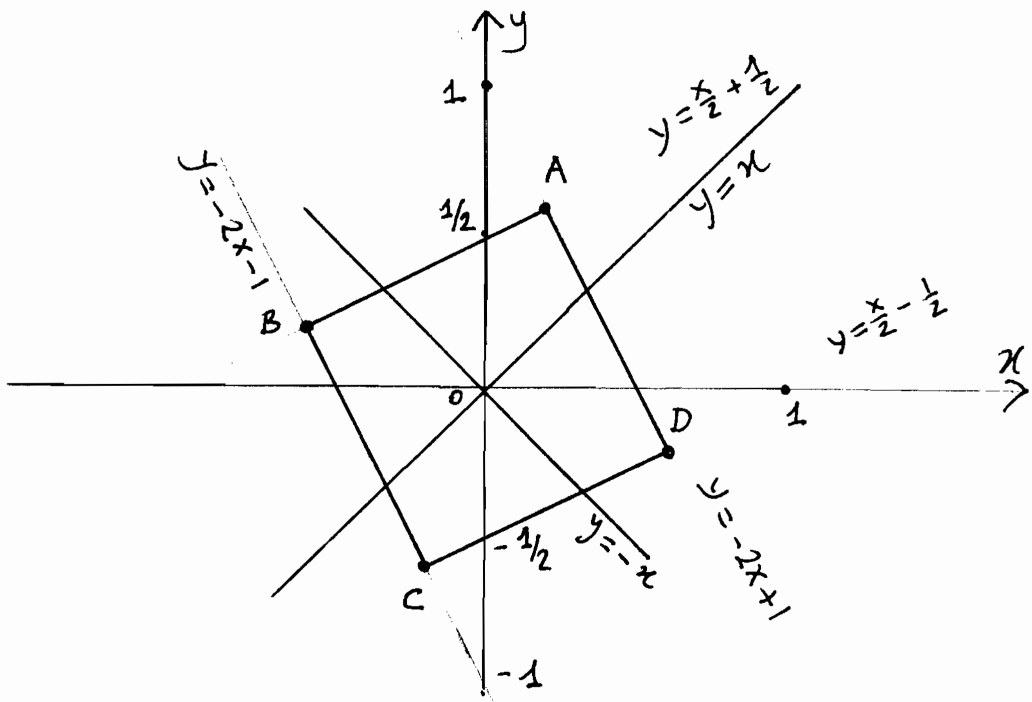
Abbiamo perciò trovato la soluzione

$$y(t) = \mathrm{tg}\left(1 - e^{-t}\right)$$ definita nell'intervallo massimale $t \in \left(-\log\left(1+\frac{\pi}{2}\right), +\infty\right)$

ESERCIZIO 3. Il dominio Ω è quello riportato in figura (un parallelogramma)

Per individuare i valori che assume la funzione $f(x,y)$ si tratta di risolvere intanto la disequazione

$$x^2 \geq y^2 \quad \text{ovvero} \quad x^2 - y^2 \geq 0, \quad (x-y)(x+y) \geq 0$$



Riportando perciò le rette $x-y=0$ e $x+y=0$ si individuano quattro regioni in $\mathbb{R}^2$:

a) la zona I, contenente il semiasse positivo delle x, dove $f(x,y)=x^2$;

b) la zona II, contenente il semiasse positivo delle y, dove $f(x,y)=y^2$;

c) la zona III, contenente il semiasse negativo delle x, dove $f(x,y)=x^2$;

d) la zona IV, contenente il semiasse negativo delle y, dove $f(x,y)=y^2$.

Per ognuna delle quattro zone il minimo è nell'origine (unico punto comune alle quattro zone) dove la f vale zero.
Perciò il minimo assoluto della funzione è in $O=(0,0)$ dove $f(0,0)=0$.
Per quanto riguarda il massimo assoluto, per ognuna delle quattro zone si ha:

a) nella zona I il massimo assoluto è in D e corrisponde all'ascissa del punto D al quadrato;
b) nella zona II il massimo assoluto è in A e corrisponde all'ordinata del punto A al quadrato;
c) nella zona III il massimo assoluto è in B e corrisponde all'ascissa del punto B al quadrato;
d) nella zona IV il massimo assoluto è in C e corrisponde all'ordinata del punto C al quadrato.

Poiché Ω è un quadrato, i quattro valori prima nominati, per ragioni di simmetria, sono uguali fra loro, come si evince dal disegno. Determiniamo le coordinate del punto D (e quindi degli altri punti).

$$\begin{cases} y = -2x+1 \\ y = \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} y = -2x+1 \\ \frac{x}{2} - \frac{1}{2} = -2x+1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x\left(\frac{1}{2}+2\right) = 1+\frac{1}{2} \\ y = -2x+1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{3}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}}{5} = \frac{3}{5} \\ y = -2\,\frac{3}{5}+1 = -\frac{1}{5} \end{cases} \qquad D = \left(\frac{3}{5}, -\frac{1}{5}\right), \text{ da cui}$$

$$\max_{\Omega} f = f(D) = \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}, \quad \min_{\Omega} f = f(0,0) = 0.$$