Testi delle prove d'esame del corso di

Analisi Matematica 3

presso la Facoltà di Ingegneria

Bruno Rubino

L'Aquila, 2006

Indice

1 Curve

Esercizio 1.1 (10 gennaio 2005) *Calcolare la lunghezza della curva γ parametrizzata da*

$$\begin{cases} x = 3t^2 \\ & t \in [0,1] \\ y = 4t^2. \end{cases}$$

Esercizio 1.2 (4 aprile 2005) *Calcolare la lunghezza di curva cartesiana γ il cui supporto è grafico della funzione*

$$y = \begin{cases} \dfrac{x}{x+1} \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \textit{per } 0 < x \leq 1 \\ \\ 0 & \textit{per } x = 0. \end{cases}$$

Esercizio 1.3 (5 settembre 2005) *Sia data la curva $\gamma : [0,1] \to \Gamma \subset \mathbb{R}^2$ definita da:*

$$\gamma(t) = \begin{cases} x(t) = t^2 \\ y(t) = t^3. \end{cases}$$

1. *Dimostrare (giustificando opportunamente la risposta) che la curva è rettificabile e* ***successivamente*** *calcolarne la lunghezza.*

2. *Dato il campo vettoriale $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definito da $F(x,y) = (2xy, x^2 + y)$, calcolare il suo lavoro lungo la curva Γ.*

3. *Dimostrare (giustificando opportunamente la risposta) che il campo vettoriale F è conservativo nel suo dominio di definizione e* ***successivamente*** *calcolare un suo potenziale e verificare infine il risultato del punto 2.*

Esercizio 1.4 (7 aprile 2006) *Calcolare la lunghezza della curva $\gamma : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $\gamma(t) = (t, 3t^2, 6t^3)$.*

2 Superfici

Esercizio 2.1 (22 luglio 2005) *Calcolare l'area della superficie piana delimitata dalla curva*

$$\gamma = \left\{(x, y,) \in \mathbb{R}^2 : \ y - x^2 \geq 0, \quad x^2 + y^2 \leq 4\right\}.$$

Esercizio 2.2 (5 settembre 2005) *Calcolare l'area della superficie del paraboloide*

$$\Pi = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R} : \ z = x^2 + 3y^2, \ z \leq 1\right\}.$$

Esercizio 2.3 (24 luglio 2006) *Calcolare l'area della superficie sferica* Γ *di centro l'origine e raggio* $\sqrt{5}$ *staccata dal cono di equazione* $x = 2\sqrt{y^2 + z^2}$.

3 Teorema di Gauss-Green e formula dell'area

Esercizio 3.1 (6 dicembre 2004) *Facendo uso della formula dell'area, calcolare l'area della superficie piana*

$$\mathcal{S} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad x^2 + y^2 \leq 1\right\}.$$

Esercizio 3.2 (2 dicembre 2005) *Facendo uso della formula dell'area, calcolare l'area della superficie piana*

$$\mathcal{S} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ y \geq x^2, \quad x^2 + y^2 \leq 2\right\}.$$

Esercizio 3.3 (4 luglio 2006) *Facendo uso della formula dell'area, calcolare l'area dell'insieme* $\mathbb{T}$ *la cui frontiera è sostegno della curva parametrizzata da*

$$\varphi : \begin{cases} x = 2(1 + \cos t) \cos t \\ \\ y = 2(1 + cost) \sin t. \end{cases} \qquad -\pi \leq t \leq \pi$$

Esercizio 3.4 (22 settembre 2006) *Mediante la formula dell'area, calcolare l'area della superficie del dominio*

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 2 - x \le y \le 4 - x^2 \ \right\}.$$

Esercizio 3.5 (24 marzo 2006) *Verificare il teorema di Gauss–Green per il campo vettoriale* $F(x,y) = (x^2 - 4y^2,\ x^2 + 4y^2)$ *e la regione*

$$\mathcal{D} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 1 \le x^2 + y^2 \le 4\right\}.$$

4 Campi vettoriali

Esercizio 4.1 (10 gennaio 2005) *Sia dato il campo vettoriale*

$$F(x,y) = \left(\frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2},\quad \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}\right).$$

a) *Determinare il dominio di* $\mathbb{R}^2$ *in cui* F *è definito e* C^1.

b) *Verificare che* F *è irrotazionale.*

c) *Stabilire a priori se* F *è conservativo e, in caso affermativo, determinare un suo potenziale.*

Esercizio 4.2 (21 marzo 2005) *Sia dato il campo vettoriale*

$$F(x,y) = \left(\frac{2x + 2x^3 + 2xy^2}{x^2+y^2}, \frac{2y - 2x^2y - 2y^3}{x^2+y^2}\right).$$

- *Determinare il dominio di* $\mathbb{R}^2$ *in cui* F *è definito e* C^1.
- *Verificare che* F *è irrotazionale.*
- *Stabilire a priori se* F *è conservativo e, in caso affermativo, determinare un suo potenziale.*

Esercizio 4.3 (4 aprile 2005) *Sia dato il campo vettoriale*

$$F(x,y) = \left(\frac{y + x^2 + y^2}{x^2 + y^2}, \quad -\frac{x + x^2 + y^2}{x^2 + y^2} \right).$$

- *Determinare il dominio di* $\mathbb{R}^2$ *in cui* F *è definito e* C^1.
- *Verificare se* F *è irrotazionale.*
- *Stabilire a priori se* F *è conservativo e, in caso affermativo, determinare un suo potenziale.*

Esercizio 4.4 (4 luglio 2005) *Sia dato il campo vettoriale*

$$F(x,y) = \left(3x^2 + \frac{2xy}{x^2 + y^2} \ , \ \ \log\left(x^2 + y^2\right) + \frac{2y^2}{x^2 + y^2} \right).$$

- *Determinare il dominio di* $\mathbb{R}^2$ *in cui* F *è definito e* C^1.
- *Verificare che* F *è irrotazionale.*
- *Stabilire a priori se* F *è conservativo e, in caso affermativo, determinare un suo potenziale. Calcolare poi il lavoro per andare da* $A = (0, -1)$ *a* $B = (1, 0)$.

Esercizio 4.5 (19 settembre 2005) *Nel dominio*

$$\Omega = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 \geq 2, \ |z| \leq \pi/4 \right\}$$

si consideri il campo vettoriale irrotazionale

$$F(x,y,z) = \left(\frac{x \tan^2(z) - y \tan(z) + 2x}{(y - x\tan(z))^2 + (2x^2 + y^2 - 1)}, \frac{-x\tan(z) + 2y}{(y - x\tan(z))^2 + (2x^2 + y^2 - 1)}, \right.$$
$$\left. + \frac{x^2 \tan^3(z) - xy\tan^2(z) + x^2\tan(z) - xy}{(y - x\tan(z))^2 + (2x^2 + y^2 - 1)} \right).$$

Stabilire a priori *se è conservativo e, in caso affermativo, calcolarne un potenziale.*

Esercizio 4.6 (5 novembre 2005) *Sia dato il campo vettoriale*

$$F(x,y) = \left(\frac{x}{x^2+y^2} - \frac{x-1}{(x-1)^2+y^2} \ , \quad \frac{y}{x^2+y^2} - \frac{y}{(x-1)^2+y^2} \right)$$

- *Determinare il dominio di* $\mathbb{R}^2$ *in cui* F *è definito e di classe* C^1.
- *Verificare se* F *è irrotazionale.*
- *Stabilire a priori se* F *è conservativo e, in caso affermativo, determinare il suo potenziale* P *tale che* $P(2,0) = 0$.

Esercizio 4.7 (13 gennaio 2006) *Sia dato il campo vettoriale*

$$F(x,y,z) = \left(\frac{4xz}{\sqrt{4x^2+y^2-1}}, \ \frac{yz}{\sqrt{4x^2+y^2-1}}, \ \sqrt{4x^2+y^2-1} \right).$$

- *Determinare il dominio di* $\mathbb{R}^3$ *in cui* F *è definito e* C^1.
- *Verificare che* F *è irrotazionale.*
- *Stabilire a priori se* F *è conservativo e, in caso affermativo, determinare un suo potenziale.*

Esercizio 4.8 (24 marzo 2006) *Sia dato il campo vettoriale*

$$F(x,y) = \left(\frac{x-y}{x^2+y^2}, \ \frac{x+y}{x^2+y^2} \right)$$

- *Determinare il dominio di* $\mathbb{R}^2$ *in cui* F *è definito e* C^1.
- *Verificare che* F *è irrotazionale.*
- *Stabilire a priori se* F *è conservativo e, in caso affermativo, determinare un suo potenziale.*

Esercizio 4.9 (4 luglio 2006) *Sia dato il campo vettoriale*

$$F(x,y) = (1 + ye^{xy},\ xe^{xy} + \cos y)\,.$$

Dire se F è conservativo e, in caso affermativo, calcolarne un potenziale.

Esercizio 4.10 (22 settembre 2006) *Dato il campo vettoriale su $\mathbb{R}^2$*

$$F(x,y) = \left(\frac{8x-8}{4(x-1)^2+y^2}, \frac{2y}{4(x-1)^2+y^2}\right) \ ,$$

(a) *Determinare il dominio di F,*

(b) *Stabilire se F è conservativo sul suo dominio,*

(c) *In caso di risposta affermativa alla domanda (b), determinare un potenziale per F.*

5 Teorema di Stokes

Esercizio 5.1 (6 dicembre 2004) *Verificare il teorema di Stokes per il campo vettoriale*

$$F(x,y,z) = \left(\frac{2xz}{x^2+y^2},\ \frac{2yz}{x^2+y^2},\ z + \log\left(x^2+y^2\right)\right).$$

e la superficie

$$\mathcal{S} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ z = 0,\ 1 \le x^2+y^2 \le 4\right\}$$

orientata con versore normale $\mathbf{n} = (0,0,1)$.

Esercizio 5.2 (21 marzo 2005) *Verificare il teorema di Stokes in $\mathbb{R}^3$ per il campo vettoriale*

$$F(x,y,z) = (x,\ y,\ z)$$

e la superficie

$$\mathcal{C} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ z^2 = x^2 + y^2, \quad 1 \leq z \leq 4\right\}.$$

Esercizio 5.3 (4 aprile 2005) *Verificare il teorema di Stokes in* $\mathbb{R}^3$ *per il campo vettoriale*

$$F(x, y, z) = (x, \ y, \ z)$$

e la superficie

$$\mathcal{Q} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ z = 0, \quad |x| \leq 1, \quad |y| \leq 1\right\}.$$

Esercizio 5.4 (19 settembre 2005) *Verificare l'uguaglianza stabilita dal Teorema di Stokes in* $\mathbb{R}^3$ *per il campo vettoriale* $F = (2x, -3y, z)$ *e la superficie* $\mathcal{S}$ *frontiera della regione*

$$\mathcal{R} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 = 1, \ 0 \leq z \leq x + 2\right\}.$$

Esercizio 5.5 (2 dicembre 2005) *Verificare il teorema di Stokes per il campo vettoriale*

$$F(x, y, z) = \big(yz, \ xz, \ xy + z^2\big)$$

e la superficie

$$\mathcal{S} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ z = x^2 + y^2, \ 1 \leq z \leq 4\right\}$$

orientata in modo tale che la terza componente del versore normale sia negativa.

Esercizio 5.6 (7 aprile 2006) *Facendo uso del teorema di Stokes calcolare la circuitazione del campo vettoriale* $F(x, y, z) = (\cos(\pi y), \ \sin(\pi x), 0)$ *attorno al rettangolo di vertici* $A = (0, 1, 0)$, $B = (0, 0, 1)$, $C = (1, 0, 1)$, $D = (1, 1, 0)$ *percorso in senso antiorario per una persona in piedi che guarda dall'orgine.*

6 Teorema di Gauss

Esercizio 6.1 (20 dicembre 2004) *Verificare il teorema di Gauss per il campo vettoriale*

$$F(x, y, z) = (y,\ z,\ 0)\,.$$

e il dominio

$$\mathcal{D} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\ 0 \le z \le 1, \quad x^2 + y^2 \le 4\right\}.$$

Esercizio 6.2 (10 gennaio 2005) *Verificare il teorema di Gauss in* $\mathbb{R}^2$ *per il campo vettoriale*

$$F(x, y) = (x,\ xy)\,.$$

e la regione

$$\mathcal{D} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ |x| \le 2, \quad 0 \le y \le 4 + \cos x\right\}.$$

Esercizio 6.3 (22 luglio 2005) *Verificare il teorema della divergenza per il campo vettoriale*

$$F(x, y, z) = (\sin x, \cos y, 0)$$

e il dominio

$$\mathcal{D} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\ z \ge 0,\ x^2 + y^2 + z^2 \le 1\right\}.$$

Esercizio 6.4 (5 novembre 2005) *Verificare il teorema di Gauss in* $\mathbb{R}^3$ *per il campo vettoriale*

$$F(x, y, z) = (3x,\ -y,\ z)$$

e il dominio

$$\mathcal{S} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2 + y^2 + z^2 \le 81\right\}.$$

Esercizio 6.5 (16 dicembre 2005) *Verificare il teorema di Gauss per il campo vettoriale*

$$F(x,y,z) = \big((x-1)^2, -2xy, 2z\big)$$

e l'insieme

$$\Omega = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y^2 + z^2 \leq x^2,\ 0 \leq x \leq 1\right\}.$$

Esercizio 6.6 (13 gennaio 2006) *Verificare il teorema di Gauss per il campo vettoriale*

$$F(x,y,z) = (x,y,z)$$

e il dominio

$$\mathcal{D} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ z \geq x^2 + y^2 - 1,\ z \leq -x^2 - y^2 + 1\right\}.$$

Esercizio 6.7 (24 luglio 2006) *Verificare il teorema di Gauss per il campo vettoriale* $F(x,y,z) = (x+y+z, y^2, z^2)$ *e il dominio*

$$\mathcal{D} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\right\}$$

Esercizio 6.8 (5 settembre 2006) *Si consideri il parallelepipedo*

$$\mathcal{D} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ 0 \leq x \leq 3,\ 0 \leq y \leq 2,\ 0 \leq z \leq 1\right\}.$$

Verificare il teorema di Gauss per il dominio $\mathcal{D}$ *e il campo vettoriale* $F(x,y,z) = (0,0,xyz)$.

7 Equazioni del prim'ordine

Esercizio 7.1 (6 dicembre 2004) *Determinare la soluzione del problema di Cauchy*

$$\begin{cases} u_t + t u_x = u + t \\ \\ u(x,0) = \sin x. \end{cases}$$

Esercizio 7.2 (20 dicembre 2004) *Determinare la soluzione del problema di Cauchy*

$$\begin{cases} u_t - \sin(t)\ u_x = x + t \\ \\ u(x,0) = x - 1. \end{cases}$$

Esercizio 7.3 (21 marzo 2005) *Determinare la soluzione del problema di Cauchy*

$$\begin{cases} x u_x + y u_y = u + 1 \\ u(1,y) = y^2 + 5 \end{cases}$$

Esercizio 7.4 (4 luglio 2005) *Utilizzando il metodo delle curve caratteristiche, determinare la soluzione del problema di Cauchy*

$$\begin{cases} (xt - x)u_t + u_x = 1 \\ \\ u(x,0) = x. \end{cases}$$

Esercizio 7.5 (22 luglio 2005) *Utilizzando il metodo delle curve caratteristiche, determinare la soluzione del problema di Cauchy*

$$\begin{cases} u_t + u_x = x + u \\ \\ u(x,0) = \sin x + \cos x. \end{cases}$$

Esercizio 7.6 (5 settembre 2005) *Utilizzando il metodo delle curve caratteristiche, determinare la soluzione del problema di Cauchy*

$$\begin{cases} 2u_t + \log(t)u_x = tu \\ \\ u(x,1) = 2x. \end{cases}$$

Esercizio 7.7 (19 settembre 2005) *Utilizzando il metodo delle curve caratteristiche, determinare la soluzione del problema di Cauchy*

$$\begin{cases} 2yu_x - xu_y = u & \textit{in } x > 0, \quad y < 0 \\ \\ u(x,0) = x & \textit{per } x > 0. \end{cases}$$

Esercizio 7.8 (16 dicembre 2005) *Facendo uso del metodo delle caratteristiche, risolvere il seguente problema di Cauchy:*

$$\begin{cases} u_t + x\cos(t)u_x = x\cos(t) \\ u(x,0) = 2x - 3. \end{cases}$$

8 Equazioni di tipo ellittico

Esercizio 8.1 (20 dicembre 2004) *Mediante l'uso della separazione delle variabili, risolvere il seguente problema:*

$$\begin{cases} u_{xx} + 9\ u_{yy} = 0 & 0 < x < \pi, \quad 0 < y < \pi \\ u\,(x,0) = \cos(3x) & 0 < x < \pi \\ u\,(x,\pi) = \cos(5x) & 0 < x < \pi \\ u_x\,(0,y) = u_x\,(\pi,y) = 0 & 0 < y < \pi. \end{cases}$$

Esercizio 8.2 (21 marzo 2005) *Mediante l'uso della separazione delle variabili, risolvere il seguente problema:*

$$\begin{cases} \triangle u = 0 & \textit{per } \rho < 1 \\ u = \sin(\vartheta) + 3\cos(\vartheta) & \textit{per } \rho = 1, \end{cases}$$

dove $u = u(\rho,\vartheta)$, $\triangle u = u_{\rho\rho} + \dfrac{1}{\rho}u_\rho + \dfrac{1}{\rho^2}u_{\vartheta\vartheta}$.

Esercizio 8.3 (4 aprile 2005) *Mediante l'uso della separazione delle variabili, risolvere il seguente problema:*

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 & 0 < x < \pi, \quad 0 < y < 1 \\ u\,(x, 0) = -\sin(3x) + \sin(7x) & 0 < x < \pi \\ u\,(x, 1) = 2\sin(7x) & 0 < x < \pi \\ u\,(0, y) = u\,(\pi, y) = 0 & 0 < y < 1. \end{cases}$$

Esercizio 8.4 (22 luglio 2005) *Mediante l'uso della separazione delle variabili, risolvere il seguente problema:*

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & 0 < x < \pi, \ 0 < y < \pi, \\ \\ u(x, 0) = u(x, \pi) = 0, & 0 < x < \pi, \\ \\ u_x(0, y) = u_x(\pi, y) = \sin(4y), & 0 < y < \pi. \end{cases}$$

Esercizio 8.5 (4 luglio 2006) *Mediante l'uso della separazione delle variabili, risolvere il seguente problema*

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 & 0 < x < \pi, \ 0 < y < \pi, \\ u(x, 0) = 0 & 0 < x < \pi, \\ u(x, \pi) = \sin(5x) & 0 < x < \pi, \\ u(0, y) = u(\pi, y) = 0 & 0 < y < \pi. \end{cases}$$

Esercizio 8.6 (24 luglio 2006) *Mediante l'uso della separazione delle variabili, risolvere il seguente problema*

$$\begin{cases} u_{xx} + 4u_{yy} = 0 & 0 < x < \pi, \ 0 < y < \pi, \\ u(x, 0) = -\sin x & 0 < x < \pi, \\ u(x, \pi) = \sin(3x) & 0 < x < \pi, \\ u(0, y) = u(\pi, y) = 0 & 0 < y < \pi. \end{cases}$$

9 Equazioni di tipo parabolico

Esercizio 9.1 (6 dicembre 2004) *Mediante l'uso della separazione delle variabili, risolvere il seguente problema:*

$$\begin{cases} u_t - 9u_{xx} = 0 & 0 < x < \pi, \quad t > 0 \\ u(x, 0) = \sin(3x) - 3\sin(5x) & 0 < x < \pi \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0 & t > 0. \end{cases}$$

Esercizio 9.2 (10 gennaio 2005) *Mediante l'uso della separazione delle variabili, risolvere il seguente problema:*

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 & 0 < x < \pi, \quad t > 0, \\ u_x(0, t) = u_x(\pi, t) = 0 & t > 0, \\ u(x, 0) = 1 + \cos x + 3\cos(10x) & 0 < x < \pi. \end{cases}$$

Esercizio 9.3 (4 luglio 2005) *Mediante l'uso della separazione delle variabili, risolvere il seguente problema:*

$$\begin{cases} u_t - 9u_{xx} = 0, & 0 < x < \pi, \ t > 0, \\ \\ u(x, 0) = 1 + \sin x, & 0 < x < \pi, \\ \\ u_x(0, t) = u_x(\pi, t) = 0, & t > 0. \end{cases}$$

Esercizio 9.4 (19 settembre 2005) *Mediante il metodo di separazione di variabili, risolvere il seguente problema:*

$$\begin{cases} u_t - 3u_{xx} = 0 & 0 < x < \pi, \quad t > 0, \\ \\ u(x, 0) = \frac{1}{2} - \cos(2x) & 0 < x < \pi, \\ \\ u_x(0, t) = u_x(\pi, t) = 0 & t > 0. \end{cases}$$

Esercizio 9.5 (13 gennaio 2006) *Mediante l'uso della separazione delle variabili, risolvere il seguente problema:*

$$\begin{cases} u_t - 2u_{xx} = 0 & 0 < x < 3, t > 0 \\ u(x,0) = 7\cos\left(\frac{5\pi}{3}x\right) - 5\cos\left(\frac{7\pi}{3}x\right) & 0 < x < 3 \\ u_x(0,t) = u_x(3,t) = 0 & t > 0. \end{cases}$$

Esercizio 9.6 (5 settembre 2006) *Mediante l'uso della separazione delle variabili, risolvere il seguente problema*

$$\begin{cases} u_t - 2u_{xx} = 0 & 0 < x < 1,\ t > 0, \\ u(x,0) = 3\cos(\pi x) - 5\cos(2\pi x) + 2 & 0 < x < 1, \\ u_x(0,t) = u_x(1,t) = 0 & t > 0. \end{cases}$$

10 Equazioni di tipo iperbolico

Esercizio 10.1 (5 settembre 2005) *Mediante l'uso della separazione delle variabili, risolvere il seguente problema:*

$$\begin{cases} u_{tt} - 2u_{xx} = 0, & 0 < x < \pi,\ t > 0, \\ \\ u(x,0) = 3 + \cos(2x), & 0 < x < \pi, \\ \\ u_t(x,0) = 5, & 0 < x < \pi, \\ \\ u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0, & t > 0. \end{cases}$$

Esercizio 10.2 (2 dicembre 2005) *Mediante l'uso della separazione delle variabili, risolvere il seguente problema:*

$$\begin{cases} u_{tt} - 16u_{xx} = 0 & 0 < x < \pi, t > 0 \\ u(x,0) = 3 + 5\cos(6x) & 0 < x < \pi \\ u_t(x,0) = 1 + 8\cos(3x) & 0 < x < \pi \\ u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0 & t > 0. \end{cases}$$

Esercizio 10.3 (24 marzo 2006) *Mediante l'uso della separazione delle variabili, risolvere il seguente problema:*

$$\begin{cases} u_{tt} - 2u_{xx} = 0 & 0 < x < 6, \\ \\ u(x,0) = f(x) & 0 < x < 6 \\ u_t(x,0) = 0 & 0 < x < 6 \\ u\left(0,t\right) = u\left(6,t\right) = 0 & t \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

dove

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \textit{se } 0 \leq x \leq 3, \\ 12 - 2x & \textit{se } 3 < x \leq 6. \end{cases}$$

Esercizio 10.4 (22 settembre 2006) *Mediante l'uso della separazione delle variabili, risolvere il seguente problema*

$$\begin{cases} u_{tt} - 4u_{xx} = 0 & 0 < x < \pi, \ t > 0, \\ u(x,0) = 5\sin 2x & 0 < x < \pi, \\ u_t(x,0) = -\sin 4x, \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 & t > 0. \end{cases}$$

11 Serie di Fourier

Esercizio 11.1 (6 dicembre 2004) *Sia data la funzione* 2π*–periodica dispari definita in* $[0,\pi]$ *da*

$$f(x) = 1 - \cos x.$$

- *Dopo averla disegnata, determinarne la relativa serie di Fourier.*
- *Studiare le proprietà di convergenza puntuale ed uniforme di tale serie.*

Esercizio 11.2 (20 dicembre 2004) *Sia data la funzione* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

a) *pari,*

b) 2π*-periodica,*

c) *tale che, nell'intervallo* $[0, \pi]$*, è definita da*

$$f(x) = \sin x - \sin(3x).$$

6.1) *Dopo averla disegnata, determinarne la relativa serie di Fourier.*

6.2) *Studiare le proprietà di convergenza puntuale ed uniforme di tale serie.*

Esercizio 11.3 (10 gennaio 2005) *Sia data la funzione che nell'intervallo* $[0, \pi]$ *è espressa da*

$$f(x) = \sin x \cos x.$$

a) *Disegnare* f *in* $[0, \pi]$.

b) *Estendere* f *nell'intervallo* $[-\pi, \pi]$ *pari e in particolare disegnarla.*

c) *Estendere* f 2π*-periodica a tutta la retta reale e in particolare disegnarla.*

d) *Determinare i coefficienti di Fourier di tale funzione* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

e) *Studiare le proprietà di convergenza puntuale ed uniforme di tale serie.*

Esercizio 11.4 (21 marzo 2005) *Sia data la funzione 2π periodica definita da*

$$f(x) = \begin{cases} \cos(2x) & \textit{per} \quad -\pi \leq x \leq 0, \\ 1 + \sin x & \textit{per} \quad 0 < x < \pi. \end{cases}$$

a) *Disegnare la funzione.*

b) *Determinare i coefficienti di Fourier di tale funzione.*

c) *Studiare le proprietà di convergenza puntuale ed uniforme della serie di Fourier associata.*

Esercizio 11.5 (4 aprile 2005) *Sia data la funzione 2π periodica definita in $[-\pi, \pi)$ come*

$$f(x) = \sin\left(\frac{x}{2}\right).$$

a) *Disegnare la funzione.*

b) *Determinare i coefficienti di Fourier di tale funzione.*

c) *Studiare le proprietà di convergenza puntuale ed uniforme della serie di Fourier associata.*

Esercizio 11.6 (4 luglio 2005) *Sia data la funzione 2π periodica definita in $(-\pi, \pi]$ come*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & per - \pi < x < -\frac{\pi}{2}, \quad \frac{\pi}{2} < x \leq \pi, \\ \\ 0 & per - \frac{\pi}{2} \leq x \leq -\frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

a) *Disegnare la funzione.*

b) *Determinare i coefficienti di Fourier di tale funzione.*

c) *Studiare le proprietà di convergenza puntuale ed uniforme della serie di Fourier associata.*

Esercizio 11.7 (22 luglio 2005) *Sia data la funzione 2π periodica definita in $(-\pi, \pi]$ come*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & per \quad -\pi < x < -\frac{\pi}{2}, \quad \frac{\pi}{2} < x \leq \pi, \\ \\ -x & per \quad -\frac{\pi}{2} \leq x < 0, \\ \\ x & per \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

a) *Disegnare la funzione.*

b) *Determinare i coefficienti di Fourier di tale funzione.*

c) *Studiare le proprietà di convergenza puntuale ed uniforme della serie di Fourier associata.*

Esercizio 11.8 (5 settembre 2005) *Sia data la funzione pari e 2π periodica definita in $[0,\pi]$ come*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \textit{per } \frac{\pi}{2} < x \leq \pi, \\ \\ \dfrac{2}{\pi}x & \textit{per } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

a) *Disegnare la funzione in $[-2\pi, 2\pi]$.*

b) *Determinare i coefficienti di Fourier di tale funzione.*

c) *Studiare le proprietà di convergenza puntuale ed uniforme della serie di Fourier associata.*

Esercizio 11.9 (19 settembre 2005) *Calcolare lo sviluppo in serie di Fourier delle funzioni 1-periodiche che nell'intervallo $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ valgono*

$$u(t) = \sin t, \quad v(t) = \cos t.$$

Esercizio 11.10 (16 dicembre 2005) *Sia $f(x)$ la funzione definita da:*

$$f(x) = \begin{cases} 2x & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \\ \pi & \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi, \end{cases}$$

estesa dispari nell'intervallo $[-\pi, 0]$ e periodica di periodo 2π.

- *Disegnare il grafico di $f(x)$.*

- *Determinare la serie di Fourier associata ad $f(x)$.*
- *Studiare la convergenza puntuale e uniforme di tale serie, giustificando opportunamente le affermazioni.*

Esercizio 11.11 (16 dicembre 2005) *Sia $f(x)$ la funzione definita da:*

$$f(x) = \begin{cases} 2x & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \\ \pi & \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi, \end{cases}$$

estesa dispari nell'intervallo $[-\pi, 0]$ e periodica di periodo 2π.

- *Disegnare il grafico di $f(x)$.*
- *Determinare la serie di Fourier associata ad $f(x)$.*
- *Studiare la convergenza puntuale e uniforme di tale serie, giustificando opportunamente le affermazioni.*

Esercizio 11.12 (7 aprile 2006) *Dopo averla disegnata, sviluppare in serie di Fourier la funzione $f: [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \max\{\pi - x, 0\}$, dove con $\max\{a, b\}$ si indica il massimo tra a e b.*

12 Funzioni di una variabile complessa

Esercizio 12.1 (5 novembre 2005) *Sia data la funzione di variabile complessa*

$$f(z) = (z+1)^2 e^{\frac{1}{z-2}}$$

Scrivere tutti i possibili sviluppi di Laurent di f centrati in $z_0 = 2$. Classificare il punto z_0 e determinare il residuo della f in quel punto.

Esercizio 12.2 (2 dicembre 2005) *Sia data la funzione*

$$f(z) = \frac{\sin^2(z)}{z(z^2+1)}$$

Studiarne i punti singolari isolati, classificarli e calcolarne i residui.

Esercizio 12.3 (16 dicembre 2005) *Sia data la funzione* $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *definita da:*

$$u(x,y) = \frac{1}{2}x\cos(x)\left(e^y + e^{-y}\right) + \frac{1}{2}y\sin(x)\left(e^y - e^{-y}\right) + x^2 - y^2.$$

- *Verificare che* u *è armonica su* $\mathbb{R}^2$.
- *Determinare la famiglia delle armoniche coniugate di* u.
- *Determinare la famiglia di funzioni olomorfe di cui* u *è la parte reale.*

Esercizio 12.4 (16 dicembre 2005) *Data la funzione*

$$f(z) = \frac{z^2+4z-4}{(z-1)^2(z-2)},$$

determinarne i punti singolari isolati, classificarli e calcolare i residui in tali punti. Sviluppare quindi $f(z)$ *in serie di Laurent centrata in* $z_0 = 1$ *e convergente in* i.

Esercizio 12.5 (13 gennaio 2006) *Utilizzando il teorema dei residui, calcolare il seguente integrale:*

$$\int_0^{2\pi} \frac{2\cos x - 3}{4\sin^2 x + \cos^2 x}\, dx.$$

Esercizio 12.6 (13 gennaio 2006) *Determinare lo sviluppo in serie di Laurent della funzione* $f(z) = \dfrac{z}{z^2+1}$ *nell'insieme* $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} :\ |z-i| < 2\}$.

Esercizio 12.7 (24 marzo 2006) *Determinare lo sviluppo in serie di Laurent centrato in $z_0 = -5$ per la funzione*

$$f(z) = \frac{(z+3)^3}{(z+5)^3}$$

Classificare poi z_0 e determinare il residuo di f in tale punto.

Esercizio 12.8 (7 aprile 2006) *Data la funzione $u(x,y) = e^{-3x}\sin(3y)$,*

a) *verificare che u è una funzione armonica;*

b) *trovare tutte le funzioni olomorfe f di cui u è parte reale.*

Esercizio 12.9 (7 aprile 2006) *Mediante il metodo dei residui calcolare l'integrale*

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\vartheta}{25 - 24\cos\vartheta}$$

Esercizio 12.10 (4 luglio 2006) *Si calcoli l'integrale improprio*

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^6}$$

Esercizio 12.11 (24 luglio 2006) *Facendo uso dei metodi di analisi complessa, si calcoli il seguente integrale*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xe^{2ix}}{(1+x^2)(4+x^2)}dx$$

Esercizio 12.12 (24 luglio 2006) *Dopo aver verificato che la funzione $u(x,y) = x^2 - y^2$ è armonica nel piano (x,y), scrivere le armoniche coniugate.*

Esercizio 12.13 (5 settembre 2006) *Facendo uso dei metodi di analisi complessa, si calcoli il seguente integrale di variabile reale*

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x(1+x^2)} dx$$

Esercizio 12.14 (22 settembre 2006) *Data la funzione di variabile complessa*

$$f(z) = \frac{1}{(z+1)(z-3)},$$

(a) Determinare e classificare i punti di singolarità di f,

(b) Scrivere lo sviluppo di Laurent di f centrato in $z = 0$ e convergente in $2i$.

13 Trasformata di Laplace

Esercizio 13.1 (2 dicembre 2005) *Facendo uso della trasformata di Laplace, risolvere il seguente problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y''' - 3y'' + 3y' - y = \sin t \\ y(0) = y'(0) = y''(0) = \alpha \end{cases}$$

al variare del parametro reale α.

Esercizio 13.2 (16 dicembre 2005) *Facendo uso della trasformata di Laplace, risolvere il seguente problema di Cauchy:*

$$\begin{cases} y'' - 3y' + 2y = e^t \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 8. \end{cases}$$

Esercizio 13.3 (13 gennaio 2006) *Facendo uso della trasformata di Laplace, risolvere il seguente problema di Cauchy*

$$\begin{cases} \dot{x} = y - 1 \\ \dot{y} = 2x + y \\ x(0) = 3, \qquad y(0) = 5. \end{cases}$$

Esercizio 13.4 (24 marzo 2006) *Facendo uso della trasformata di Laplace, risolvere il seguente problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y''(t) + y(t) = (H(t-\pi) - H(t))\cos t \\ \\ y(0) = y'(0) = 0, \end{cases}$$

dove H è la funzione di Heaviside.

Esercizio 13.5 (7 aprile 2006) *Facendo uso della trasformata di Laplace, risolvere il seguente problema di Cauchy*

$$\begin{cases} u' = v \\ v' = -5u - 2v \\ u(0) = 0, \quad v(0) = 1. \end{cases}$$

Esercizio 13.6 (4 luglio 2006) *Mediante la trasformata di Laplace, risolvere il seguente problema di Cauchy:*

$$\begin{cases} y''(t) + 2y'(t) + 2y(t) = H(t-\pi) \\ \\ y(0) = 0, \; y'(0) = 1 \end{cases}$$

dove $H(\tau)$ indica la funzione di Heaviside.

Esercizio 13.7 (24 luglio 2006) *Mediante la trasformata di Laplace, risolvere il seguente problema di Cauchy:*

$$\begin{cases} y''(t) - 3y'(t) = 4e^{-t}H(t) \\ \\ y(0) = 0, \; y'(0) = 1 \end{cases}$$

dove $H(\tau)$ indica la funzione di Heaviside.

Esercizio 13.8 (5 settembre 2006) *Mediante la trasformata di Laplace, risolvere la seguente equazione:*

$$y(t) - 2\int_0^t [(t-\tau) - \sin(t-\tau)]y(\tau)d\tau = \sqrt{2}\ tH(t),$$

dove $H(\tau)$ indica la funzione di Heaviside.

Esercizio 13.9 (22 settembre 2006) *Risolvere il seguente problema mediante l'uso della Trasformata di Laplace*

$$\begin{cases} y''' - 2y' + y = H(t)e^{-t} \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \\ y''(0) = 1, \end{cases}$$

dove $H(t)$ è la funzione di Heaviside.

14 Trasformata di Fourier

Esercizio 14.1 (24 marzo 2006) *Sia*

$$u(x) = \frac{1}{x^2 + 4x + 5} * \left(e^{-(x-1)}H(x-1)\right), \quad x \in \mathbb{R},$$

dove $*$ indica la convoluzione. Calcolare la trasformata di Fourier di u.

Esercizio 14.2 (4 luglio 2006) *Applicando la trasformata di Fourier (rispetto ad x), esprimere come prodotto di convoluzione la soluzione del seguente problema di Cauchy:*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 & per\ (x,t) \in \mathbb{R}^2 \\ \\ u(x,0) = e^{-|x|} & per\ x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Esercizio 14.3 (5 settembre 2006) *Si calcoli la trasformata di Fourier di*

$$f(t) = \frac{1}{4}e^{-|5t|}$$

Esercizio 14.4 (22 settembre 2006) *Facendo uso dei metodi di analisi complessa, si calcoli la trasformata di Fourier della funzione*

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 2x + 5} \ .$$

15 Ulteriori esercizi

Esercizio 15.1 (10 gennaio 2005) *Classificare l'equazione alle derivate parziali del second'ordine nelle variabili* (x, y)

$$u_{xx} + u_{xy} + u_{yy} + u_x + u_y + u = x + y.$$

Esercizio 15.2 (4 luglio 2005) *Calcolare il flusso del campo vettoriale*

$$F(x, y, z) = (x, y, z)$$

attraverso la superficie

$$\Omega = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x = 0, \ y^2 + z^2 \leq 1\right\}.$$

Esercizio 15.3 (5 settembre 2006) *Si calcoli (a meno del segno) il flusso del campo vettoriale* $F(x, y, z) = (0, 0, xyz)$ *attraverso il rettangolo di vertici* $A = (0, 0, 0)$, $B = (3, 0, 0)$, $C = (0, 2, 1)$, $D = (3, 2, 1)$.