Risoluzione prova scritta di Analisi Matematica I
del 16.12.2005.

ESERCIZIO 1. L'equazione è una biquadratica
Indicato con $w = z^2$, l'equazione si riscrive come

$w^2 + 2w + 2 = 0$ le cui soluzioni sono

$w_{\mp} = -1 \mp \sqrt{1-2} = -1 \mp i$ ognuna delle quali con molteplicità uno.

Si ha $|w_{\mp}| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ da cui

$$w_- = -1 - i = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\, e^{+i\frac{5}{4}\pi}$$

$$w_+ = -1 + i = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\, e^{+i\frac{3}{4}\pi}$$

Da w_- si ha, poiché $z^2 = w_- = \sqrt{2}\, e^{i\frac{5}{4}\pi}$, che

$$z_1 = \sqrt[4]{2}\, e^{i\frac{5}{8}\pi}, \quad z_2 = \sqrt[4]{2}\, e^{i\left(\frac{5}{8}\pi + \pi\right)} = \sqrt[4]{2}\, e^{i\frac{13}{8}\pi}$$

mentre da w_+, poiché $z^2 = w_+ = \sqrt{2}\, e^{i\frac{3}{4}\pi}$, si ha che

$$z_3 = \sqrt[4]{2}\, e^{i\frac{3}{8}\pi}, \quad z_4 = \sqrt[4]{2}\, e^{i\left(\frac{3}{8}\pi + \pi\right)} = \sqrt[4]{2}\, e^{i\frac{11}{8}\pi}$$

ovvero che risultano quattro radici di molteplicità uno ~~$z_k = \sqrt[4]{2}\, e^{i\frac{5}{8}\pi}$~~ a due a due complesse coniugate (in accordo con il teorema fondamentale dell'Algebra nel caso a coeff. reali) in quanto

$z_2 = \overline{z_3}$, $z_4 = \overline{z_1}$.

ESERCIZIO 2. Attraverso la posizione $y=g(x)=x^2-1$,
$g'(x)=2x$ si ha

$$\int x \operatorname{arctg}(x^2-1)\,dx = \frac{1}{2}\int g'(x)\operatorname{arctg}(g(x))\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \operatorname{arctg}(y)\,dy =$$

integrando per parti

$$= \frac{1}{2}\left(y \operatorname{arctg} y - \int y \frac{dy}{y^2+1}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(y \operatorname{arctg} y - \frac{1}{2}\log(1+y^2)\right) + K$$

$$= \frac{1}{2}(x^2-1)\operatorname{arctg}(x^2-1) - \frac{1}{4}\log\left(1+(x^2-1)^2\right) + K, \quad K \in \mathbb{R}$$

ESERCIZIO 3. Trattandosi di radice cubica, il dominio di definizione è tutta la retta reale:

$D(f) \equiv \mathbb{R}$. $f(x)=0$ per $x^2+x-2=0$, $x = \frac{-1 \mp \sqrt{1+8}}{2}$

$= \frac{-1\mp 3}{2} \begin{matrix} -2 \\ +1 \end{matrix}$

Si ha poi $f(x) > 0$ per ogni $x \neq -2, 1$.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

Inoltre risulta $f(0) = \sqrt[3]{4}$

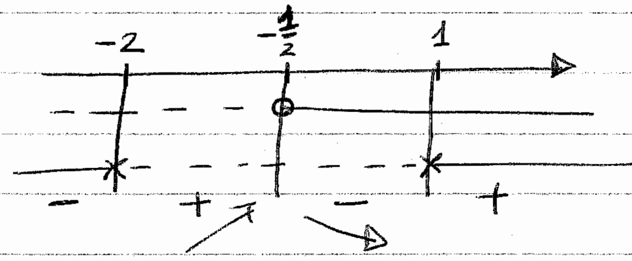
$$\lim_{x\to\mp\infty}\frac{f(x)}{|x|}=\lim_{x\to\mp\infty}\sqrt[3]{\frac{(x^2+x-2)^2}{|x|^3}}=+\infty$$

per cui non vi sono asintoti obliqui

STUDIO DELLA DERIVATA

$$f'(x)=\frac{2}{3}\left(x^2+x-2\right)^{-\frac{1}{3}}\left(2x+1\right)$$

$$=\frac{2}{3}\,\frac{2x+1}{\sqrt[3]{x^2+x-2}}\geqslant 0$$



$2x+1\geqslant 0$ per $x\geqslant -\frac{1}{2}$

$x^2+x-2>0$ per $x<-2$ e $x>1$.

per cui $f'(x)\geqslant 0$ per

$-2<x\leqslant-\frac{1}{2}$ e $x>1$.

Risult

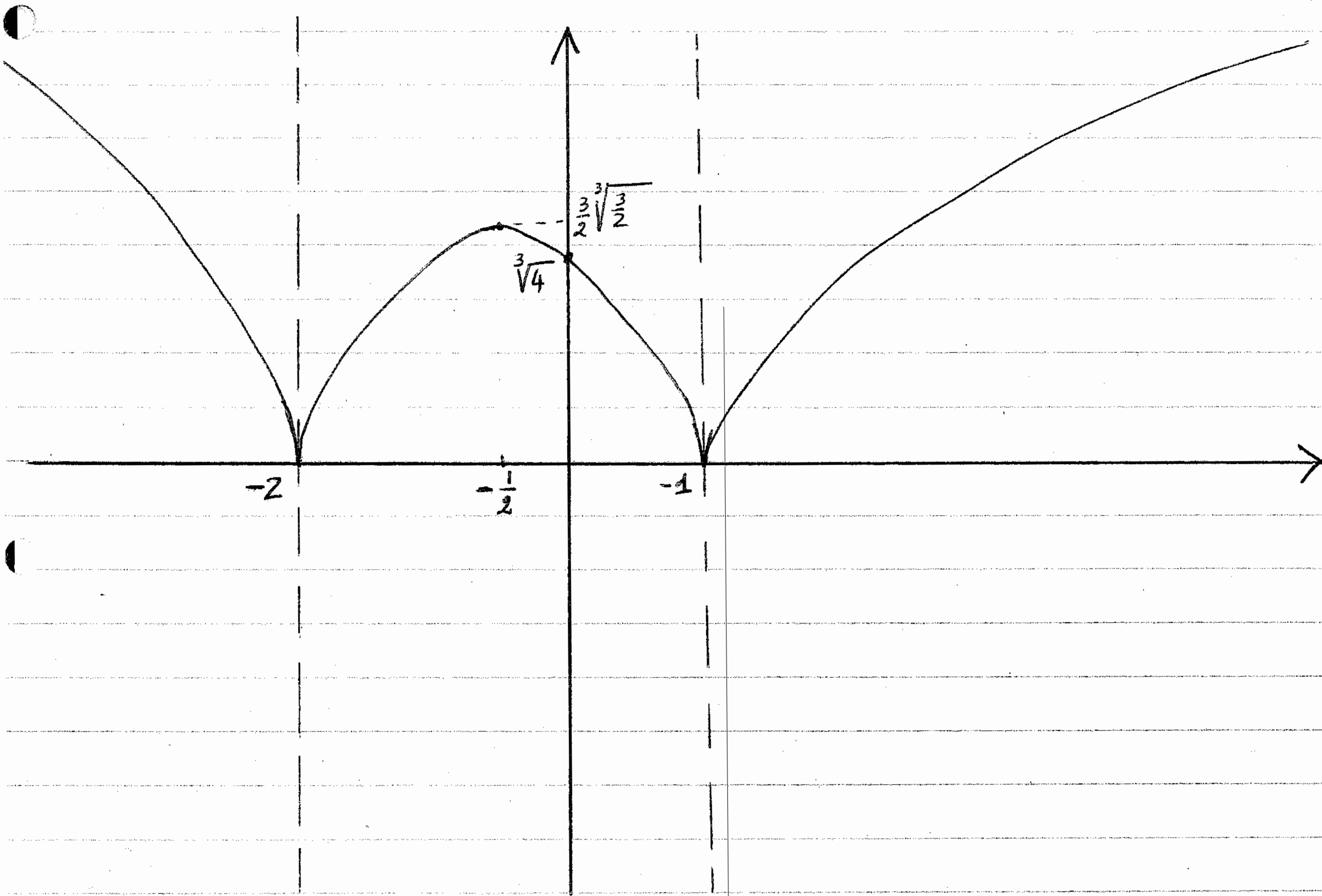
$\lim_{x\to-2^-} f'(x)=-\infty$, $\lim_{x\to-2^+} f'(x)=+\infty$, cuspide

$\lim_{x\to 1^-} f'(x)=-\infty$, $\lim_{x\to 1^+} f'(x)=+\infty$, cuspide

Inoltre $x_0=-\frac{1}{2}$ è un punto di massimo relativo e si ha

$$f\left(-\tfrac{1}{2}\right)=\sqrt[3]{\left(\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{2}-2\right)^2}=\sqrt[3]{\frac{81}{16}}=\frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{3}{2}}$$

Un grafico approssimativo è rappresentato in figura.



ESERCIZIO 4. Consideriamo la successione

$$a_n = \operatorname{sen}\left(n\frac{\pi}{2}\right)\cos(n\pi)$$

Risulta
$$\begin{aligned} a_{n+4} &= \operatorname{sen}\left((n+4)\frac{\pi}{2}\right)\cos\left((n+4)\pi\right) \\ &= \operatorname{sen}\left(n\frac{\pi}{2}+2\pi\right)\cos\left(n\pi+4\pi\right) \\ &= \operatorname{sen}\left(n\frac{\pi}{2}\right)\cos(n\pi) = a_n \qquad \forall n \geq 1. \end{aligned}$$

La successione è perciò periodica di periodo $T=4$.

Risulta poi

$$a_1 = \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\cos\pi = -1, \quad a_2 = \operatorname{sen}\pi\cos 2\pi = 0,$$

$$a_3 = \operatorname{sen}\left(\frac{3}{2}\pi\right)\cos(3\pi) = 1, \quad a_4 = \operatorname{sen}(2\pi)\cos(4\pi) = 0.$$

Sia ora $z_n = \frac{1}{n} a_n$. Si ha

$z_{2K} \equiv 0 \quad \forall K \geq 1, \ K \in \mathbb{N}$

e $\quad z_1 = a_1 = -1, \quad z_3 = \frac{1}{3} a_3 = \frac{1}{3}, \ ---$

$z_{2K-1} = \frac{(-1)^K}{2K-1}, \ \forall K \geq 1, \ K \in \mathbb{N}.$

Perciò $\inf K = z_1 = -1$ che è anche il minimo,

$\sup K = z_3 = \frac{1}{3}$ che è anche il massimo

in quanto entrambi i valori vengono assunti.

ESERCIZIO 5. — Tenuto conto che $\forall x \geq 0$ si ha

$x = [x] + (x)$, dove (x) è la parte frazionaria di x, $0 \leq (x) < 1$, si ha

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{[x]}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{[x]}{[x] + (x)} =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{1}{1 + \frac{(x)}{[x]}} = 1 \quad \text{in quanto}$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{(x)}{[x]} = 0$$ (numeratore limitato e denominatore che tende a $+\infty$).

ESERCIZIO 6. Si ha

$$-1 \le \cos\left[\log\left(\frac{n^2+1}{n+5}\right)\right] \le 1 \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Inoltre

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n+3^n}{5^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n + \left(\frac{3}{5}\right)^n = 0$$

Perciò il limite proposto è uguale a zero (prodotto di una ~~fun~~ successione limitata per una infinitesima).

~~ESERCIZIO 7. In base alla teoria degli integrali impropri sappiamo che~~

~~lim~~

ESERCIZIO 7. In base al teorema della media integrale ~~al limite~~ si ha

$$\frac{\int_0^{x^2} e^{-t^2}\,dt}{x^2} = e^{-\alpha(x)}$$

dove $\alpha(x)$ è un numero compreso tra 0 ed x^2 =

$$0 \le \alpha(x) \le x^2.$$

Risulta allora $e^{-x^2} \le e^{\alpha(x)} \le 1 \quad \forall x.$

Di conseguenza

$$\lim_{x\to 0} e^{-x^2} \le \lim_{x\to 0} \frac{\int_0^{x^2} e^{-t^2}\,dt}{x^2} \le \lim_{x\to 0} 1 = 1$$

e, visto che $\lim_{x \to 0} e^{-x^2} = 1$, per il teorema dei due carabinieri il limite proposto è uguale a 1.