CRITERIO DI ABEL-DIRICHLET

Sia $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione a valori complessi,

$a_n : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$

le cui ridotte k-esime $\sum_{n=0}^{k} a_n$ siano equilimitate: $\exists M > 0$ t.c. $\left| \sum_{n=0}^{k} a_n \right| < M \quad \forall k \in \mathbb{N}$.

Sia poi $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione a valori reali che tende monotonamente a zero.
Allora la serie

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ è convergente.

<u>ESEMPIO 1</u> — Presentiamo un primo esempio di successione le cui ridotte k-esime siano equilimitate: $a_n = (-1)^n$. Risulta infatti:

$S_0 = a_0 = 1$, $S_1 = a_0 + a_1 = 1 - 1 = 0$, $S_2 = a_0 + a_1 + a_2 = 1 - 1 + 1 = 1$, e così via.
Pertanto $\left| \sum_{n=0}^{k} (-1)^n \right| \leq 1 \quad \forall k \in \mathbb{N}$.

Come conseguenza dell'esempio 1 si ottiene che il ben noto Teorema di LEIBNIZ sulle serie di segno alterno. ∎

ESEMPIO 2

Un secondo esempio di successione le cui ridotte k-esime sono equilimitate è dato da

$$a_n = e^{in\vartheta}, \quad \vartheta \in [-\pi, \pi], \ \vartheta \neq 0.$$

Risulta infatti

$$\sum_{n=0}^{k} e^{in\vartheta} = \sum_{n=0}^{k} \left(e^{i\vartheta}\right)^n =$$

$$= \frac{1-\left(e^{i\vartheta}\right)^{k+1}}{1-e^{i\vartheta}} = \frac{1-e^{i(k+1)\vartheta}}{1-e^{i\vartheta}}$$

e passando ai moduli si ha

$$\left| \sum_{n=0}^{k} e^{in\vartheta} \right| = \frac{\left|1-e^{i(k+1)\vartheta}\right|}{\left|1-e^{i\vartheta}\right|} \leq \frac{2}{\left|1-e^{i\vartheta}\right|}$$

La costante $M_\vartheta = \dfrac{2}{\left|1-e^{i\vartheta}\right|}$ è ben definita per ogni $\vartheta \in [-\pi, \pi]$, $\vartheta \neq 0$.

Come conseguenza dell'esempio 2, se si considera ora la serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_k z^k \qquad \text{con } c_k \in \mathbb{R},\ z \in \mathbb{C}$$

e supponiamo di aver trovato che il raggio di convergenza è $r > 0$, allora per studiare i punti del bordo del cerchio di convergenza, $z = r\,e^{i\vartheta}$, $\vartheta \in [-\pi, \pi]$, si può ricorrere allo studio delle serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_k r^k e^{ik\vartheta}$$

Nel caso in cui $c_k r^k \downarrow 0$ per $k \uparrow +\infty$ (ossia risulta monotona decrescente a zero), allora si può applicare il criterio di Abel-Dirichlet prima richiamato per concludere sulla convergenza ~~della serie~~ puntuale di

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_k z^k$$

in tutti i punti del bordo $(|z| = r)$ ed eccezione del punto $z = r$ (corrispondente a $\vartheta = 0$) che andrebbe poi studiato separatamente.

ESEMPIO 3

Si consideri la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{z^n}{n \ln(n)} \qquad z \in \mathbb{C}$$

Si ha $r = 1$.

Perciò la serie converge:

- puntualmente ~~per $|z| \leq 1$~~ e assolutamente per $|z| < 1$
- uniformemente e totalmente su $|z| \leq \alpha$ con $\alpha \in (0, 1)$.

Inoltre, non vi è alcuna convergenza per $|z| > 1$

Resta da verificare il comportamento per $|z| = 1$.

Nel punto $z = 1$ si ha

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}, \quad \text{serie divergente.}$$

Per gli altri punti del bordo si ha

$z = e^{i\vartheta}$ $\quad \vartheta \in [-\pi, \pi]$, $\vartheta \neq 0$ si ha

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{e^{in\vartheta}}{n \ln(n)} \qquad (*)$$

Poiché $b_n = \dfrac{1}{n \ln(n)}$ è monotone decrescente a zero, allora la serie $(*)$ converge per $\vartheta \in [-\pi, \pi]$, $\vartheta \neq 0$ in base al criterio di Abel-Dirichlet.

Quindi, vi è convergenza uniforme su ogni raggio che congiunge i punti del bordo $z = e^{i\vartheta}$, $\vartheta \neq 0$, con l'origine, per cui si ha convergenza UNIFORME su

$$\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\} \setminus \{z \in \mathbb{C} : |z-1| < \delta\}$$

con $\delta \in (0,1)$ piccolo a piacere.

ESEMPIO 4

Si consideri la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + n^2}{n} z^n \qquad z \in \mathbb{C}$$

Vogliamo studiarne:

1. la convergenza puntuale e assoluta;
2. la convergenza totale e uniforme.

Risoluzione

Si ha

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\frac{2^n + n^2}{n}} = \lim_{n \to \infty} 2 \sqrt[n]{\frac{1 + n^2/2^n}{n}}$$

$$= 2$$

per cui $r = \frac{1}{2}$

Proviamo a studiare la convergenza assoluta per $|z| = \frac{1}{2}$ (sul bordo del cerchio di raggio $\frac{1}{2}$):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{2^n + n^2}{n} z^n \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + n^2}{n} \frac{1}{2^n} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + n^2/2^n}{n} \simeq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}, \text{ per cui}$$

diverge.

Di conseguenza, non c'è conv. assoluta ~~a~~ per ~~qua~~ $|z| = 1/2$.

Quindi, non c'è conv. totale per $|z| \leq \frac{1}{2}$ (ovvero $|z| < \frac{1}{2}$), per cui bisogna accontentarsi della

a) conv. assoluta per $|z| < 1/2$

b) conv. totale per $|z| \leq a$, $\forall a \in (0, 1/2)$.

Per quanto riguarda la convergenza puntuale sui punti del bordo del cerchio di raggio $\frac{1}{2}$, ovvero $|z| = \frac{1}{2}$, si tratta di distinguere tra:

a) $z = \frac{1}{2}$,

b) $z = \frac{1}{2} e^{i\vartheta}$ per $\vartheta \in [-\pi, \pi]$, $\vartheta \neq 0$.

a) Per $z = \frac{1}{2}$ si ha:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + n^2}{n} \frac{1}{2^n}$$ che ancora diverge (stessa serie precedente!).

b) Per $z = \frac{1}{2} e^{i\vartheta}$ si ha

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2^n + n^2}{n} \frac{1}{2^n} \right) e^{in\vartheta}$$

Si tratta di vedere se si può applicare il Criterio di Abel-Dirichlet.
Bisogna cioè verificare che

$$c_n = \frac{2^n+n^2}{n}\,\frac{1}{2^n}$$

è una successione decrescente a zero. Si ha

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1+n^2/2^n}{n} = 0$$

Quanto alla monotonia (che ci interessa solo a livello di comportamento definitivo) si tratta di provare che

$c_{n+1} < c_n$. Infatti

$$\frac{1+\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}}{n+1} < \frac{1+\frac{n^2}{2^n}}{n} \iff$$

$$\cancel{n} + \frac{n(n+1)^2}{2^{n+1}} < \cancel{n}+1 + \frac{(n+1)n^2}{2^n} \iff$$

$$n(n+1)^2 < 2^{n+1} + 2(n+1)n^2 \iff$$

$$\cancel{n^3}+\cancel{2n^2}+n < 2^{n+1} + \cancel{2}n^3 + \cancel{2n^2} \iff$$

$$2^{n+1} > n - n^3,$$ vero!

Quindi possiamo applicare il criterio di Abel-Dirichlet e concludere che

c) la serie converge puntualmente per $z \in \mathbb{C}$,
$|z| = \frac{1}{2}$, ma $z \neq \frac{1}{2}$, ovvero tutta
la circonferenza escluso un punto.
La convergenza puntuale si ha perciò:

$$\forall z \in \mathbb{C} : \quad |z| \leq \frac{1}{2} \quad \text{escluso } z = \frac{1}{2}$$

d) la serie converge su tutti i raggi
che congiungono i punti della circonferenza
di raggio $|z| = \frac{1}{2}$ con l'origine, escluso
per il punto del bordo $z = \frac{1}{2}$.
Si ha, quindi, convergenza uniforme su

$$\left\{ z \in \mathbb{C} : |z| \leq \frac{1}{2} \right\} \setminus \left\{ z \in \mathbb{C} : |z - 1/2| < \delta \right\}$$

con $\delta \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ piccolo a piacere.