FORMULA DI TAYLOR PER FUNZIONI DI PIÙ VARIABILI

Sia $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, Ω aperto, una funzione di due variabili ~~e siano $D_x f$ e $D_y f$~~

Indichiamo, in analogia a quanto si fa in una variabile, con

D_x e D_y

gli operatori di derivata parziale, ~~ed esem~~ che agiscono per esempio tra gli spazi di funzione

$$D_y, D_x : C^1(\Omega) \longrightarrow C(\Omega)$$

e che ad ogni funzione f associano le loro derivate parziale.

Notiamo che si tratta di operatori lineari:

$$D_x(f+g) = D_x f + D_x g \qquad \forall f, g \in C^1(\Omega)$$

$$D_x(kf) = k\,D_x f \qquad \forall k \in \mathbb{R},\ \forall f \in C^1(\Omega),$$

~~con~~ Più in generale, se consideriamo $C^n(\Omega)$, $n \geq 2$, $\forall h, k \in \mathbb{R}$ è possibile considerare l'operatore

$h D_x + k D_y$ e, tenuto conto del teorema di Schwartz (ossia ricordando che $D_y D_x = D_x D_y$), si ha

$$(hD_x+kD_y)^2 f=(hD_x+kD_y)(hD_x f+kD_y f)=$$
$$=hD_x(hD_x f+kD_y f)+kD_y(hD_x f+kD_y f)=$$
$$=h^2D_x^2 f+2hkD_xD_y f+k^2D_y^2 f$$

ossia si comportano come i termini di un binomio.
Pertanto,

$$(hD_x+kD_y)^m f=\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}h^j k^{m-j}D_x^j D_y^{m-j} f,$$

dove $m\leq n$.
Tale oggetto, valutato in (x,y), viene detto differenziale di ordine m di f nel punto (x,y).

<u>TEOREMA</u> (formula di Taylor per funzioni di più variabili)
Sia $f:\Omega\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, Ω aperto, $f\in C^n(\Omega)$.
Supponiamo che $(\bar{x}+th,\bar{y}+tk)\in\Omega$ $\forall t\in[0,1]$
Allora $\exists\vartheta\in(0,1)$ t.c.

$$f(\bar{x}+h,\bar{y}+k)=f(\bar{x},\bar{y})+(hD_x+kD_y)f(\bar{x},\bar{y})+$$
$$+\frac{1}{2}(hD_x+kD_y)^2 f(\bar{x},\bar{y})+\dots+\frac{1}{(n-1)!}(hD_x+kD_y)^{n-1}f(\bar{x},\bar{y})+$$
$$+\frac{1}{n!}(hD_x+kD_y)^n f(\bar{x}+\vartheta h,\bar{y}+\vartheta k)$$

Dimostrazione

Sia $\sigma(t) = (\bar{x} + th, \bar{y} + tk)$, $t \in [0,1]$, il segmento che congiunge $(\bar{x}, \bar{y})$ con $(\bar{x}+h, \bar{y}+k)$.
Consideriamo

$$F(t) = f(\sigma(t))$$

Risulta $F \in C^n([0,1])$ e si ha
~~e risulta~~

$$\frac{d}{dt} F(t) = h\, f_x(\sigma(t)) + k\, f_y(\sigma(t)) = \cancel{\langle \nabla f(\sigma(t)), (h,k) \rangle}$$

$$= (h D_x + k D_y)\, f(\sigma(t)),$$

$$\frac{d^m}{dt^m} F(t) = (h D_x + k D_y)^m f(\sigma(t)).$$

D'altra parte, ~~leggendo la F come funzione di~~ essendo $F \in C^n([0,1])$, per essa è possibile ~~ubilit~~ scrivere la formula di Taylor di una variabile, in particolare centrata in $t_0 = 0$ e letta in $t_1 = 1$:

$$F(1) = F(0) + F'(0) + \frac{F''(0)}{2!} + \dots + \frac{F^{(n-1)}(0)}{(n-1)!} + \frac{F^{(n)}(\vartheta)}{n!}$$

da cui sostituendo la formula di Taylor cercata.

$$f(\bar{x}+h, \bar{y}+k) = \dots$$

$\blacksquare$

MASSIMI E MINIMI DI FUNZIONI DI DUE VARIABILI

Per prima cosa ricordiamo che

LEMMA:
Condizione necessaria affinché una funzione $f: \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, Ω aperto, $f \in C^1(\Omega)$, abbia un massimo o un minimo <u>locale</u> in $(\bar{x}, \bar{y}) \in \Omega$ è che $\nabla f(\bar{x}, \bar{y}) = 0$.

Tale condizione non è però sufficiente (punti di sella).
Facciamo alcuni esempi e controesempi:

<u>ESEMPIO</u>

$f(x,y) = x^2 + y^2$ presenta nell'origine un minimo assoluto e quindi anche locale. In tale punto è $\nabla f \equiv 0$.

<u>CONTROESEMPIO</u>

$f(x,y) = x^2 - y^2$ ~~presenta nell'origine~~ Per tale funzione risulta ancora $\nabla f(0,0) = 0$. Tuttavia per tale funzione nell'origine non vi è né un punto di massimo, né di minimo: se si restringe la funzione lungo la retta $y=0$, nell'origine vi è un punto di minimo; se la si restringe lungo la retta $x=0$, nell'origine vi è un punto di massimo. Diremo in tal caso che la ~~fu~~ funzione presenta nell'origine un punto di sella.

Al fine di ~~stabilire~~ ottenere una condizione sufficiente, premettiamo lo studio delle forme quadratiche in due variabili.

FORME QUADRATICHE IN DUE VARIABILI

Una forma quadratica in due variabili ha l'espressione

$$h(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 = (x,y)\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Si noti che una forma quadratica ha la proprietà di essere zero in zero e di avere ~~tutte~~ lo stesso segno su tutti i punti di ogni retta passante per l'origine, visto che

$$h(tx, ty) = t^2 h(x,y).$$

Tenuto poi conto della seconda rappresentazione sopra riportata, ~~si~~ è fondamentale studiare ~~il segno~~ la ~~su~~ forma quadratica attraverso la matrice simmetrica ad essa associata:

$$S = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

1) Se $\det S > 0$ e $a > 0$, ossia se i due autovalori di S sono positivi, diremo che la forma quadratica è definita positiva. Si ha $h(x,y) > 0 \ \forall (x,y) \neq (0,0)$

2) Se $\det S > 0$ e $a < 0$, ossia se i due autovalori di S sono negativi, diremo che la forma quadratica è definita negativa. Si ha $h(x,y) < 0 \ \forall (x,y) \neq (0,0)$

3) Se $\det S < 0$, ossia se i due autovalori hanno segno opposto, esisteranno due direzioni passanti per l'origine su cui h ha segno opposto e due ulteriori direzioni passanti per l'origine su cui h si annulla.

4) Se $\det S = 0$, ~~allora~~ ossia se almeno uno dei due autovalori di S è nullo, risulterà h identicamente nulla (entrambi gli autovalori nulli) oppure su una retta passante per l'origine (mentre su tutti gli altri punti assume lo stesso segno). Diremo in tal caso che è semidefinita (positiva o negativa)

Al fine di verificare tali affermazioni, è sufficiente studiare gli autovalori della matrice S.

—/—

Siamo ora in grado di studiare il problema dei massimi e minimi.

TEOREMA

Sia $f:\Omega\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, Ω aperto, $f\in C^2(\Omega)$.
Supponiamo $\nabla f(\bar{x},\bar{y})=0$ in $(\bar{x},\bar{y})\in\Omega$.
~~Allora~~ Chiamiamo ~~determina~~ matrice hessiana la matrice

$$\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix}$$

e determinante hessiano Hf il suo determinante.

Risulta allora

1) Se $Hf(\bar{x},\bar{y})>0$ e $f_{xx}(\bar{x},\bar{y})<0$, la funzione ha in $(\bar{x},\bar{y})$ un massimo locale;

2) Se $Hf(\bar{x},\bar{y})>0$ e $f_{xx}(\bar{x},\bar{y})>0$, la funzione ha in $(\bar{x},\bar{y})$ un minimo locale;

3) Se $Hf(\bar{x},\bar{y})<0$, la funzione non ha nè massimo nè minimo nel punto $(\bar{x},\bar{y})$.

4) Se $Hf(\bar{x},\bar{y})=0$, non si è in grado di stabilire il comportamento della funzione nel punto $(\bar{x},\bar{y})$.

DIMOSTRAZIONE

Visto che $f\in C^2(\Omega)$, è possibile scrivere la formula di Taylor arrestata al secondo ordine e centrata in $(\bar{x},\bar{y})$:

$$f(\bar{x}+h,\bar{y}+k)-f(\bar{x},\bar{y})=\frac{1}{2}\left[(h,k)\begin{pmatrix} f_{xx}(\bar{x}+\vartheta h,\bar{y}+\vartheta k) & f_{xy}(\dots) \\ f_{xy}(\bar{x}+\vartheta h,\bar{y}+\vartheta k) & f_{yy}(\dots)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} h\\ k\end{pmatrix}\right]$$

con $\vartheta\in(0,1)$.

Ossia, se indichiamo che

$$S(x,y;h,k)=(h,k)\begin{pmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y)\\ f_{xy}(x,y) & f_{yy}(x,y)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} h\\ k\end{pmatrix},$$

si ha

$$f(\bar{x}+h, \bar{y}+k) - f(\bar{x},\bar{y}) = S(x,y\,;h,k)$$

Esaminiamo i vari casi.

Nei primi due, in base alla permanenza del segno, è possibile determinare un intorno circolare di raggio δ, U_δ del punto $(\bar{x},\bar{y})$ tale che $\forall (x,y) \in U_\delta$ si ha

$$\cancel{S(x,y;h,k)}\ \cancel{\det}\ Hf(\bar{x},\bar{y}) > 0.$$

Inoltre, sempre per la permanenza del segno, $f_{xx}(x,y)$ mantiene il medesimo segno in U_δ.
Pertanto, a seconda dei casi, si ha un massimo o un minimo locale.

Analogamente, nel terzo caso, ~~utilizzando le coordinate polari:~~

$$\cancel{\begin{cases} h = r\cos\alpha \\ k = r\sin\alpha \end{cases}}$$

esistono due direzioni $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ (che possiamo considerare versori) sui ~~e tenendo conto che~~ quali si ha

~~$S(\bar{x}+$~~ $S(\bar{x},\bar{y}\,;\vec{v}_1) > 0$ ed $S(\bar{x},\bar{y},\vec{v}_2) < 0$,

Esistono pertanto due angoli α_1 e α_2 per i quali si ha $v_1 = (\cos\alpha_1, \sin\alpha_1)$, $v_2 = (\cos\alpha_2, \sin\alpha_2)$.

Preso allora

$$\begin{cases} h = r\cos\alpha_1 \\ k = r\sin\alpha_2 \end{cases}$$

risulta

$$S(\bar{x}+\vartheta h, \bar{y}+\vartheta k; h, k) = r^2 S(\bar{x}+\vartheta h, \bar{y}+\vartheta k; \cos\alpha_1, \sin\alpha_1)$$

Di conseguenza, poiché passando al limite per $r \to 0^+$ si ottiene

$$\lim_{r\to 0} S(\bar{x}+\vartheta h, \bar{y}+\vartheta k; \cos\alpha_1, \sin\alpha_1) = S(\bar{x}, \bar{y}; \cos\alpha_1, \sin\alpha_1) > 0,$$

per la permanenza del segno si ha anche

$$S(\bar{x}+\vartheta h, \bar{y}+\vartheta k; h, k) > 0 \quad \text{per } r>0 \text{ suff. piccolo.}$$

Analogamente per la direzione $\vec{v}_2$ si ottiene

$$S(\bar{x}+\vartheta h, \bar{y}+\vartheta k; h, k) < 0$$

ed il punto risulta quindi di sella.

Per quanto riguarda l'osservazione conclusiva, per avvalorarla basta fornire degli esempi.

<u>Esempio 1</u>. $f(x,y) = x^4+y^4$ ha nell'origine un minimo assoluto (e quindi relativo) nonostante la sua matrice hessiana risulti nulla.

<u>Esempio 2</u>. $f(x,y) = -x^4 - y^4$ ha nell'origine un massimo assoluto (e quindi relativo) nonostante la sua matrice hessiana risulti nulla

<u>ESEMPIO 3</u> $f(x,y) = x^4 - y^4$ ha nell'origine un punto di sella (facile da verificare) nonostante la sua matrice hessiana risulti nulla.

Massimi e minimi in più di due variabili

Teorema

Sia $f: \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, Ω aperto, $f \in C^2(\Omega)$, $n \geq 2$.

Supponiamo $\nabla f(\bar{x}, \bar{y}) = 0$ in $(\bar{x}, \bar{y}) \in \Omega$.

Detta

$$\begin{pmatrix} f_{x_1 x_1} & f_{x_1 x_2} & \cdots & f_{x_1 x_n} \\ f_{x_1 x_2} & & & \\ \vdots & & & \\ f_{x_1 x_n} & & & f_{x_n x_n} \end{pmatrix}$$

la matrice hessiana (simmetrica in base al teorema di Schwarz) e indicati con $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ i suoi autovalori (ripetuti in base alla molteplicità e ordinati, $\lambda_j \leq \lambda_{j+1}$), risulta:

1) Se $\lambda_j < 0$ (strettamente negativi) $\forall j$, allora $(\bar{x}, \bar{y})$ è un massimo locale;
2) Se $\lambda_j > 0$ (strettamente positivi) $\forall j$, allora $(\bar{x}, \bar{y})$ è un minimo locale;
3) Se $\lambda_1 < 0$ e $\lambda_n > 0$ (ossia se esiste almeno un autovalore negativo ed almeno un autovalore positivo), allora $(\bar{x}, \bar{y})$ non è né massimo e né minimo locale (sella).

FUNZIONI IMPLICITE

Sia $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, Ω aperto.

Consideriamo l'insieme

$$\{(x,y) \in \Omega : f(x,y) = 0\}$$

ossia l'insieme dei punti del piano nei quali la funzione f si annulla. Ci si pone la seguente domanda: è possibile interpretare f come grafico di una opportuna funzione di una variabile? Vedremo immediatamente, attraverso qualche esempio, che, sebbene in alcuni casi la risposta è affermativa, in generale non lo è.

<u>Esempio 1</u>

Sia $f(x,y) = 2x^2 + y - 5$ definita su tutto $\mathbb{R}^2$.

e consideriamo l'insieme

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = 0\}$$

In tal caso l'insieme considerato corrisponde al grafico della parabola

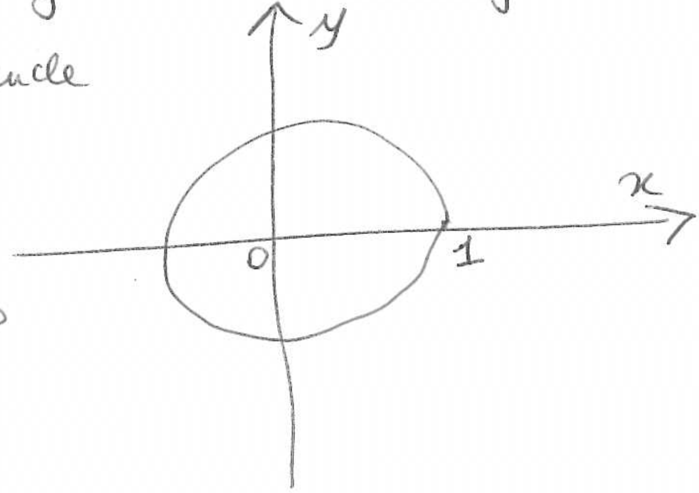
$$y = \varphi(x) = -2x^2 + 5, \quad x \in \mathbb{R}.$$

<u>Esempio 2</u>

Sia $f(x,y) = x^2 + y^2 - 1$, definita su tutto $\mathbb{R}^2$ e consideriamo l'insieme

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = 0\}$$

Come è noto, tale insieme rappresenta la circonferenza unitaria centrata nell'origine (vedi anche figura)



Come è evidente anche dalla figura, in tal caso $\forall x \in (-1, 1)$ esistono due valori opposti di y che fanno parte del luogo di zeri:

$$y = \mp \sqrt{1 - x^2}$$

La presenza di due valori anziché uno evidenzia l'impossibilità a considerare l'insieme grafico di un'opportuna funzione.
Il problema non lo si risolve scambiando il ruolo tra le due variabili: $\forall y \in (-1, 1)$ esistono due valori opposti di x che fanno parte del luogo di zeri:

$$x = \mp \sqrt{1 - y^2}.$$

Proviamo ora a porci una domanda più specifica.
Dato l'insieme

$$\mathcal{C} = \{(x,y) \in \Omega : f(x,y) = 0\},$$

supponiamo che $(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathcal{C}$. Ci chiediamo se è possibile ~~esplicitare il luo~~ interpretare in un intorno di $(\bar{x}, \bar{y})$ il nostro luogo di zeri come grafico di una funzione di una variabile.

Siamo cioè passati dal problema globale ~~al~~ a quello locale.
Se esaminiamo il problema precedente ~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~ (quello relativo alla circonferenza unitaria) si vede che facilmente che

$\forall (\bar{x},\bar{y}) \in \mathcal{C},\ \bar{y} > 0$

è possibile esplicitare ~~[illegible]~~ $\mathcal{C}$ in un suo intorno come $\boxed{y = +\sqrt{1-x^2}}$

mentre $\forall\ \bar{x},\bar{y} \in \mathcal{C},\ \bar{y} < 0$, è possibile esplicitare $\mathcal{C}$ in un suo intorno come

$$y = -\sqrt{1-x^2}$$

Non siamo però in grado di esplicitare $y = \varphi(x)$ nell'intorno dei punti $(-1,0)$ e $(1,0)$, in quanto per tali punti ~~[illegible]~~ la richiesta nell'intorno del punto non limita il problema in un solo semipiano $y<0$ oppure $y>0$.
D'altra parte, però, laddove $\bar{x} < 0$ è possibile esplicitare

$$x = -\sqrt{1-y^2}$$

così come, dove $\bar{x} > 0$, è possibile esplicitare

$$x = +\sqrt{1-y^2}$$

In definitiva, almeno nel caso della circonferenza unitaria, $\forall (\bar{x},\bar{y}) \in C$, esiste sempre un intorno $U(\bar{x},\bar{y})$ nel quale ~~almeno una delle~~

è possibile esplicitare almeno una variabile in funzione dell'altra, ossia interpretare localmente il luogo di zeri come grafico di ~~fun~~ una funzione di una variabile.

E' utile osservare che è opportuno aggiungere una richiesta relativa alla ~~funzione da~~ regolarità della funzione da esplicitare: se la funzione $f \in C(\Omega)$, allora ~~anche il luogo di zeri sarà un insieme che~~ è ragionevole richiedere che anche il luogo di zeri sia localmente grafico di una funzione continua.

Vale in tale contesto il risultato seguente

TEOREMA DI DINI (I PARTE, ESISTENZA E UNICITÀ)

$f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, Ω aperto, $f \in C(\Omega)$, $f_y \in C(\Omega)$. Sia $(x_0, y_0) \in \Omega$ e appartenente al luogo di zeri della f:

$$\mathcal{C} = \{(x,y) \in \Omega : f(x,y) = 0\},$$

e supponiamo

$f_y(x_0, y_0) \neq 0$. Allora ~~è possibile determinare~~

$\exists U(x_0)$, $\exists V(y_0)$ ed $\exists!\, \varphi : U \longrightarrow V$

$\varphi \in C(U)$ t.c. $f(x, \varphi(x)) = 0 \quad \forall x \in U(x_0)$

Vale poi il seguente risultato relativo alla regolarità della funzione φ.

TEOREMA DI DINI (II PARTE, REGOLARITÀ)

Ferme restando le ipotesi del teorema precedente, supponiamo che $f \in C^k(\Omega)$, con $k \geq 1$. Allora la funzione $\varphi \in C^k(U)$.

Si ha inoltre

$$\varphi'(x) = -\frac{f_x(x, \varphi(x))}{f_y(x, \varphi(x))} \quad \forall x \in U$$

ed in particolare

$$\varphi'(x_0) = -\frac{f_x(x_0, y_0)}{f_y(x_0, y_0)}$$

OSSERVAZIONE. Nei due teoremi sopra enunciati è possibile scambiare il ruolo delle due variabili. Pertanto, se si ha $f_y(x_0, y_0) = 0$, è opportuno verificare se $f_x(x_0, y_0) \neq 0$ in modo da scambiare il ruolo degli assi.
Di conseguenza, al fine dell'esplicitazione intorno ad un punto (x_0, y_0) che fa parte del luogo di zeri della f, si tratta di verificare se $\nabla f(x_0, y_0) \neq 0$. Nel caso affermativo il luogo di zeri è localmente un grafico cartesiano.

Diremo in tal caso che il punto è __regolare__.
In caso contrario lo definiremo __singolare__.

~~Il punto singolare~~ E' possibile notare, attraverso vari esempi, che nell'intorno di un punto singolare possono presentarsi le situazioni più disparate.

__ESEMPIO 1__. Sia $f(x,y) = x^2 - y^2$
e consideriamo l'insieme

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = 0\}$$

Prendiamo $P = (0,0)$. E' facile vedere che l'insieme consiste delle due bisettrici che escono da P, perpendicolari fra loro. Quindi, anche geometricamente, è evidente che non è possibile esplicitare una qualunque delle due variabili in funzione dell'altra. D'altra parte, il punto P è singolare.

__ESEMPIO 2__ Sia $f(x,y) = (x^2+y^2-1)^2$ e ~~sia~~ si consideri l'insieme

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = 0\}$$

Preso un qualunque punto P nell'insieme, ~~si~~ si ha

$$D_x f = 2\,(x^2+y^2-1) \cdot 2x$$
$$D_y f = 2\,(x^2+y^2-1) \cdot 2y$$

che valutate nel punto P valgono zero.
Quindi, tutti i punti dell'insieme sono singolari.

D'altra parte, l'insieme luogo di zeri è la classica circonferenza unitaria, per cui sappiamo che è localmente esplicitabile, almeno rispetto ad una delle due variabili. Il problema è in questo caso, dunque, soltanto tecnico ma non effettivo.

OSSERVAZIONE CONCLUSIVA

Il risultato presentato in questo paragrafo (Teorema di Dini) consiste perciò, sotto l'ipotesi che il punto preso in considerazione sul luogo di zeri sia regolare, in un risultato di esistenza. Tuttavia il teorema non è in grado di fornire, nel caso generale, ~~la funzione di~~ esplicitamente la funzione di cui il luogo di zeri è grafico. In effetti, però, se la funzione $f \in C^k(\Omega)$, come si è visto nel teorema di regolarità, è possibile stabilire che anche $\varphi \in C^k(U)$. Inoltre, in analogia al calcolo della derivata prima (vedi risultato riportato nel teorema) è possibile calcolare le varie derivate successive in P fino all'ordine k, potendo in questo modo esprimere lo sviluppo di Taylor della funzione φ fino all'ordine desiderato.

Vediamo tale calcolo su un esempio.

TEOREMA DI DINI (caso n-dimensionale)

Sia $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, Ω aperto, $f \in C^k(\Omega)$, $f_{x_n} \in C(\Omega)$.
(nel caso in cui $k \geq 1$ l'ipotesi sulla derivata parziale f_{x_n} è superflua), $k \geq 0$.

Sia $x^0 \in \Omega$ e appartenente al luogo di zeri della f:

$$C = \{ x \in \Omega : f(x) = 0 \}$$

e supponiamo $f_{x_n}(x^0) \neq 0$. Allora

$\exists\, U(x_1^0, \dots, x_{n-1}^0) \subset \mathbb{R}^{n-1}$, $\exists\, V(x_n^0) \subset \mathbb{R}$ ed

$\exists!\, \varphi : U \longrightarrow V$, $\varphi \in C^k(U)$ t.c.

$$f(x_1, \dots, x_{n-1}, \varphi(x_1, \dots, x_n)) = 0$$

$\forall (x_1, \dots, x_{n-1}) \in U$.

Inoltre, se $k \geq 1$, si ha

$$\nabla \varphi(x_1, \dots, x_{n-1}) = \left(-\frac{f_{x_1}}{f_{x_n}}, \dots, -\frac{f_{x_{n-1}}}{f_{x_n}} \right)(x_1, \dots x_{n-1}, \varphi(\dots))$$

e, in particolare,

$$\nabla \varphi(x_1^0, \dots, x_{n-1}^0) = \left(-\frac{f_{x_1}}{f_{x_n}}, \dots, -\frac{f_{x_{n-1}}}{f_{x_n}} \right)(x_1^0, \dots, x_n^0).$$

FUNZIONI IMPLICITE: GENERALIZZAZIONE

A completamento di quanto prima visto a proposito del teorema di Dini, presentiamo ora una generalizzazione al caso di sistemi. L'obiettivo è quello di stabilire, ~~sotto quali condizioni,~~ dato un sistema non lineare del tipo

$$\begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_m) = 0 \\ \vdots \\ f_m(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_m) = 0 \end{cases}$$

~~e supposto che $P = (x^0; y^0)$ faccia sia soluzione, $x^0 = (x_1^0, \dots$ ovvero~~

ovvero, in forma compatta,

$$f(x, y) = 0,$$

dove

$$f = (f_1, \dots, f_m),$$
$$(x, y) = (x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_m),$$

supposto che $P = (x^0, y^0)$ sia soluzione, sotto quali condizioni ~~$(x,y) \in \mathbb{R}^{n+m}$ è ancora soluzione~~ in un intorno di P è possibile esplicitare le m-variabili y in funzione delle n variabili x?

Il risultato che stiamo cercando, oltre che essere una generalizzazione di quanto visto per il teorema di Dini, può essere visto come versione non lineare di quanto trovato nel caso dei sistemi lineari attraverso la teoria

dell'algebra lineare che qui richiamiamo.
Dato il sistema lineare

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + \dots + a_{1n} x_n + b_{11} y_1 + \dots + b_{1m} y_m = 0 \\ \vdots \\ a_{m1} x_1 + \dots + a_{mn} x_n + b_{m1} y_1 + \dots + b_{mm} y_m = 0 \end{cases}$$

~~ovvero, se indichiamo con~~
sotto quali condizioni è possibile esplicitare ~~le~~ m-variabili ~~y~~ in funzione delle restanti n?
~~Risolto~~ Sappiamo che la risposta a tale domanda è data dal teorema di Rouché Capelli, in base al quale è condizione necessaria e sufficiente che esista un minore di ordine massimo, ossia m. Supponiamo in particolare che siano le ultime m le colonne che danno luogo ad un minore invertibile: in tal caso sarà possibile esplicitare le variabili m in funzione delle variabili n.
Nello specifico, se indichiamo con

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{pmatrix}$$

il sistema lineare ~~lo~~ può essere riscritto nella forma

$$Ax + By = 0$$

e da qui è possibile ~~ricavare~~ risolvere rispetto a y:

$$By = -Ax$$ e, visto che B è invertibile (visto che abbiamo detto che si tratta di un minore di rango massimo)

$$B^{-1}By = B^{-1}(-Ax)$$

$$y = -B^{-1}Ax$$

che è la soluzione del sistema (corrispondente alle regole di Kramer).

Nel caso non lineare, se si ~~[illegible]~~ suppone che $g \in C^1(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+m}$ aperto, $(x^\circ, y^\circ) \in \Omega$,

il sistema non lineare $g(x,y) = 0$ può essere riscritto nella forma

$$~~[illegible]~~ \quad D_x g(x^\circ, y^\circ)(x - x^\circ) + D_y g(x^\circ, y^\circ)(y - y^\circ) + $$
$$+ o(\|(x - x^\circ, y - y^\circ)\|) = 0,$$

dove

$$D_x g(x^\circ, y^\circ) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(x^\circ, y^\circ) & \cdots\cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n}(x^\circ, y^\circ) \\ \vdots & & \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1}(x^\circ, y^\circ) & \cdots\cdots & \frac{\partial g_m(x^\circ, y^\circ)}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

e

$$D_y g(x^\circ, y^\circ) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1}(x^\circ, y^\circ) & \cdots\cdots & \frac{\partial g_1}{\partial y_m}(x^\circ, y^\circ) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_m(x^\circ, y^\circ)}{\partial y_1} & \cdots\cdots & \frac{\partial g_m(x^\circ, y^\circ)}{\partial y_m} \end{pmatrix}$$

Se si trascurano gli infinitesimi di ordine superiore al primo e se

$$\det D_y g(x^0, y^0) \neq 0,$$

allora da

$$D_y g(x^0, y^0)\,(y - y^0) = -D_x g(x^0, y^0)\,(x - x^0),$$

~~[illegible]~~ si ottiene

$$y = y^0 - \left[D_y g(x^0, y^0)\right]^{-1}\left[D_x g(x^0, y^0)\right](x - x^0).$$

Ovviamente il conto appena effettuato, trascurando i termini di ordine superiore al lineare, è esattamente l'analogo rispetto a quello svolto nel caso dei sistemi lineari attraverso la regola di Kramer.
Si tratta, adesso, di ottenere un risultato, analogo al teorema di Dini, che vada nella direzione del risultato che si ottiene "linearizzando" (ovvero il conto prima svolto trascurando i termini di ordine superiore rispetto ai termini lineari).

TEOREMA DELLE FUNZIONI IMPLICITE

Sia $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^m_y \longrightarrow \mathbb{R}^m$, Ω aperto, $f \in C^K(\Omega)$, $K \geq 1$ e supponiamo che $\exists\,(x^0; y^0) \in \Omega$ tale che $f(x^0, y^0) = 0$ e $\det D_y f(x^0, y^0) \neq 0$.
Allora $\exists\, U = U(x^0) \subset \mathbb{R}^n$ intorno di x^0, $\exists\, V = V(y^0) \subset \mathbb{R}^m$ intorno di y^0 ed $\exists!\, \varphi : U(x^0) \longrightarrow V(y^0)$, $\varphi \in C^k(U(x^0))$ tale che $f(x, \varphi(x)) = 0 \quad \forall x \in U(x^0)$.

Inoltre vale la formula seguente per la matrice jacobiana di φ:

$$D\varphi(x) = -\left[D_y f(x, \varphi(x))\right]^{-1}\left[D_x f(x, \varphi(x))\right] \quad \forall x \in U(x^0)$$

ed, in particolare,

$$D\varphi(x^0) = -\left[D_y f(x^0, y^0)\right]^{-1}\left[D_x f(x^0, y^0)\right].$$

OSSERVAZIONE

Nel caso in cui la $f \in C(\Omega)$, nel caso $n=1$, $m=1$, ricordiamo che il teorema di Dini ammetteva ugualmente il risultato di esistenza (ovviamente) senza il risultato relativo alla formula per la derivata della f, visto che $\varphi \in C(U)$. Stessa cosa vale in questo caso, ossia il risultato precedente continua a valere garantendo $\exists!\, \varphi \in C(U)$.

CURVE E LORO LUNGHEZZA

La trattazione relativa alle curve che viene qui proposta è orientata ~~alle~~ principalmente ai suoi aspetti analitici. Si assume che gli studenti siano già familiari con gli aspetti cinematici legati al moto di una particella nello spazio ed alla sua legge oraria.

<u>DEFINIZIONE</u> - Definiamo curva nello spazio una coppia (γ, r), dove $\gamma \subset \mathbb{R}^3$ è il supporto della curva ed $r = r(t)$ la sua parametrizzazione,

$r : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$, I intervallo della retta in cui varia il parametro t e t.c. $r(I) = \gamma$ (ovvero γ coincide con l'immagine di I tramite r). Assumeremo qui che la parametrizzazione è continua, $r \in C(I)$.

Riferendoci ~~alla~~ all'esperienza in ambito cinematico, ~~il~~ il supporto γ corrisponde alla traiettoria, mentre la parametrizzazione $r = r(t) = (x(t), y(t), z(t))$ corrisponde alla legge oraria della particella oggetto di studio al variare del tempo $t \in I$, dove I è l'intervallo di tempo preso in esame.

Introdurremo ora la terminologia minima per ~~poter descrivere~~ giungere al concetto di lunghezza di una curva.

i) Parleremo di <u>curve chiuse</u> se la parametrizzazione assume lo stesso valore ai due estremi della parametrizzazione: $r : [a, b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ e $r(a) = r(b)$.

2) Diremo che la curva (γ, r) è <u>semplice</u> se r risulta iniettiva (ad eccezione, eventualmente, dei punti estremi della parametrizzazione): $\forall\, t_1, t_2 \in \mathring{I}$, $t_1 \neq t_2$, si ha $r(t_1) \neq r(t_2)$.

3) Diremo che una curva è <u>piana</u> se il suo supporto è contenuto su un piano.

4) Diremo che la curva (γ, r) è <u>regolare</u> se $r \in C^1(I)$ e se $\dot{r}(t) \neq 0 \;\; \forall t \in I$.

Diremo poi che (γ, r) è <u>regolare a tratti</u> se l'intervallo I può essere suddiviso in un numero finito di intervalli su ciascuno dei quali γ è regolare.

Tornando agli aspetti cinematici, se $r \in C^1(I)$, il vettore $\dot{r}(t)$ rappresenta la velocità istantanea che risulterà un vettore tangente alla traiettoria stessa. Possiamo inoltre definire <u>la velocità scalare</u> data da

$$\|\dot{r}(t)\| = \sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2 + (\dot{z}(t))^2}$$

Nel caso in cui $\|\dot{r}(t)\| \neq 0$, è possibile poi definire il versore velocità

$$T(t) = \frac{\dot{r}(t)}{\|\dot{r}(t)\|}$$

che rappresentano i coseni direttori della retta tangente alla traiettoria.

Nel caso in cui $r \in C^2(I)$, è possibile poi definire anche

i) il vettore ~~velocità~~ $\ddot{r}(t)$ accelerazione

ii) il versore normale principale $N(t) = \dfrac{\dot{T}(t)}{\|\dot{T}(t)\|}$

osserviamo che, in generale il vettore accelerazione NON è diretto come il versore normale principale.

Si definisce, infine, il versore binormale come

$$B = T \wedge N$$

detto versore <u>binormale</u>.
I tre vettori T, N e B costituiscono una terna ortonormale che si muove lungo il supporto della curva con la legge oraria $r(t)$ e che ha la stessa orientazione della terna destrorsa $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$. La terna T, N, B prende il nome di <u>terna intrinseca</u> alla curva.

5) E' importante per il seguito introdurre il concetto di <u>curve equivalenti</u>.
Date due curve (γ_1, r_1) e (γ_2, r_2), diremo che esse sono equivalenti se hanno lo stesso supporto $\gamma = \gamma_1 = \gamma_2$ e le loro parametrizzazioni
$r_1 : I_1 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $r_2 : I_2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$
sono legate da un cambio di variabili $\psi : I_2 \longrightarrow I_1$
Ovvero il diagramma seguente è commutativo:

$$\begin{tikzcd}
I_1 \arrow[r, "r_1"] & \gamma_1 \arrow[d, equal] \\
I_2 \arrow[u, "\psi"] \arrow[r, "r_2"'] & \gamma_2
\end{tikzcd}$$

$$r_2 = r_1 \circ \psi \qquad \text{ovvero} \qquad r_1 = r_2 \circ \psi^{-1}.$$

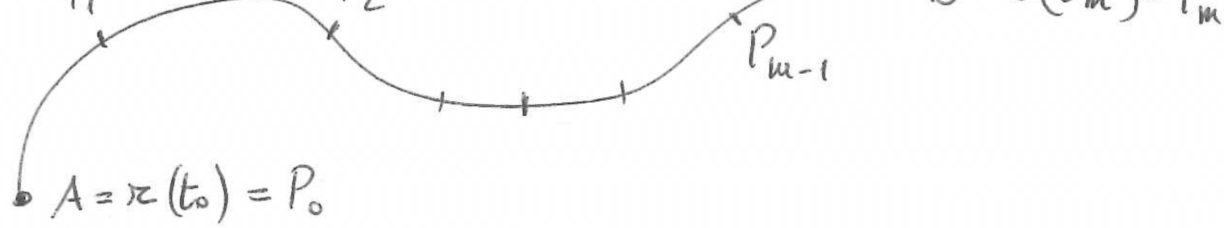
Se (γ_1, r_1) e (γ_2, r_2) erano orientate,
~~Se ψ è monotona crescente~~ diremo che le due curve

sono ~~[illegible]~~ equivalenti se, oltre a quanto detto prima, ~~[illegible]~~ φ risulta monotona crescente.

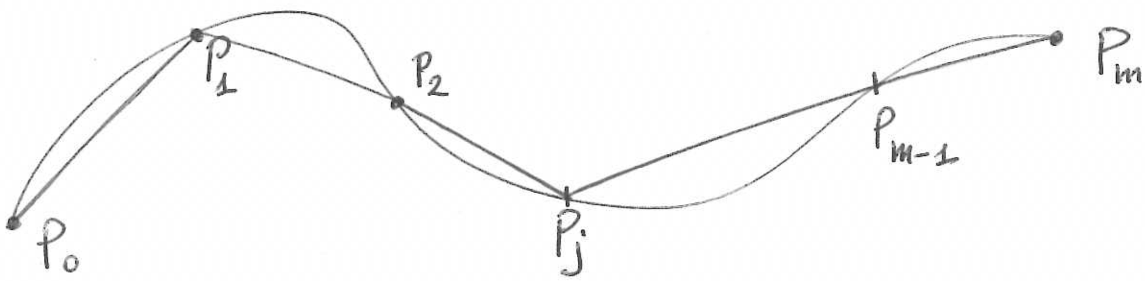
Dal punto di vista cinematico, due curve equivalenti corrispondono a due curve che hanno lo stesso supporto ma le cui leggi orarie si ottengono l'una dall'altra attraverso ~~[illegible]~~ un cambio di variabili.

Veniamo ora al problema ~~[illegible]~~ del come misurare la lunghezza di un dato supporto di una curva. Il concetto di lunghezza di un supporto va definito. Si assume al momento di ~~[illegible]~~ saper misurare la lunghezza ~~[illegible]~~ solo per un segmento (o per l'unione di segmenti, ovvero una spezzata). La definizione di lunghezza alla quale giungere dovrà generalizzare quella nota per la lunghezza di un segmento ed essere in accordo con quanto abitualmente utilizzato nella pratica: se si percorre un percorso ~~[illegible]~~ (anche curvilineo) ~~[illegible]~~ a velocità costante ~~[illegible]~~ pari a 60 Km/h e ci si impiega esattamente un'ora, la lunghezza del percorso è 60 Km.
Nota la legge oraria $r(t)$, allora è nota anche la velocità (istantanea) $|\dot{r}(t)|$, ma non è automatico risalire alla lunghezza del percorso.

Consideriamo la curva (γ, r), con $\gamma \subset \mathbb{R}^3$ ed $r : I = [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $r(I) = \gamma$, $r \in C(I)$. Presa una suddivisione
$\tau = \{a = t_0, t_1, \dots, t_m = b\}$ dell'intervallo $[a,b]$ con $t_j < t_{j+1}$ $\forall j$, consideriamo i punti $P_j = r(t_j)$ sul supporto



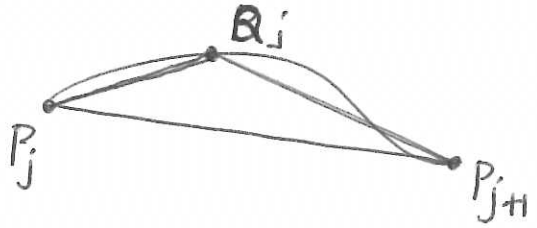
Consideriamo la spezzata inscritta nella curva ottenuta, unendo fra loro, i punti (in ordine)



La lunghezza della spezzata è data da

$$l_\tau = \sum_{j=0}^{m} | P_{j+1} - P_j | = \sum_{j=0}^{m} | r(t_{j+1}) - r(t_j) |$$

È evidente che, se si aggiunge un ulteriore punto (non mutando la posizione di tutti gli altri), la lunghezza della nuova spezzata così ottenuta è maggiore della precedente, visto che si è creato un



triangolo nel quale, come sempre, ogni lato ha lunghezza maggiore degli altri due: $|P_{j+1} - P_j| \leq |P_j - Q_j| + |Q_j - P_{j+1}|$.

<u>DEFINIZIONE</u> (rettificabilità)

Diremo che la curva (γ, r) è rettificabile se

$$\sup_\tau l_\tau < +\infty$$

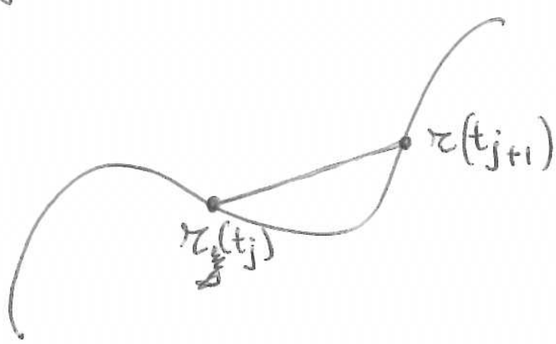
al variare di tutte le possibili spezzate τ che si appoggiano al supporto γ.

Se $\sup_\tau l_\tau = +\infty$, diremo che la curva (γ, r) è <u>rettificabile</u>.

DEFINIZIONE (Lunghezza della curva)
Se la curva (γ, r) è rettificabile, definiamo sua lunghezza
$$|\gamma| = \sup_{\pi} l_{\pi}$$
al variare di tutte le possibili spezzate π che si appoggiano al supporto γ.

Il teorema seguente ci segnala una classe importante di curve rettificabili.

TEOREMA (rettificabilità delle curve con parametrizzazione C^1).
Sia (γ, r), $\gamma \subset \mathbb{R}^3$, $r \in C^1([a,b])$ una curva.
Allora è rettificabile e la lunghezza della curva è data dalla formula
$$|\gamma| = \int_a^b |\dot{r}(t)|\, dt$$



IDEA DELLA DIMOSTRAZIONE

La lunghezza del segmento, in base alla formula di Taylor al 1° ordine, è data da
$$|r(t_{j+1}) - r(t_j)| = |\dot{r}(\bar{t})|\,|t_{j+1} - t_j|, \text{ con}$$
$\bar{t}$ nell'intervallo (t_j, t_{j+1}).
Se la suddivisione del segmento $[a,b]$ ~~viene fatta~~ è arrivata a livello infinitesimo, allora $t_{j+1} = t_j + dt$ ed il punto $\bar{t}$ è a quel punto tra i due punti infinitamente vicini t_j, t_{j+1}.
La lunghezza $|dr|$ del tratto di curva è quindi
$|dr| = |\dot{r}(t)|\, dt$.

Pensando all'intero supporto della curva si ottiene la formula del teorema.
Ovviamente, la formula trovata vale per ogni ~~f~~ curva con parametrizzazione di classe $C^1([a,b])$.