METRICA E NORMA IN SPAZI DI FUNZIONI

Ricordiamo che l'insieme delle funzioni continue su un dato insieme I è uno spazio vettoriale; ~~rispetto~~

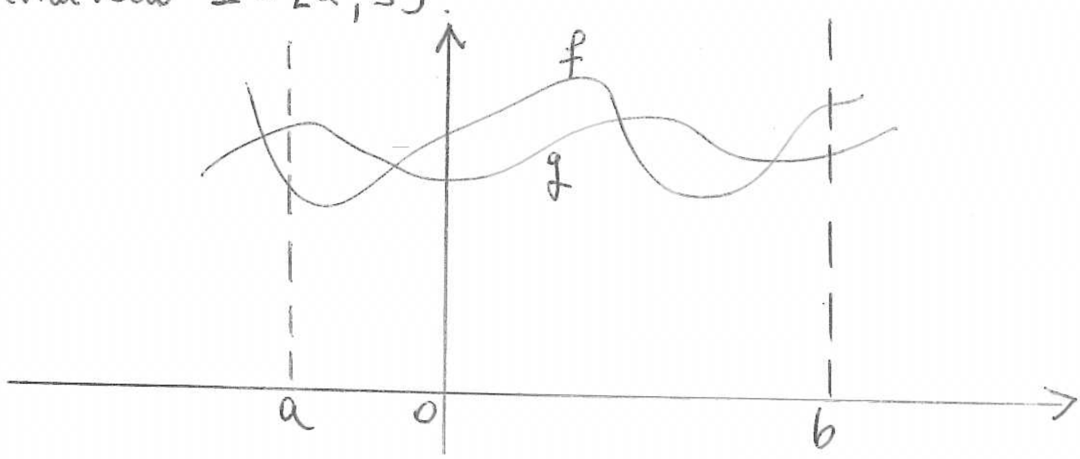
$$\forall f, g \in C(I) \implies f+g \in C(I)$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{R},\ \forall f \in C(I) \implies \alpha f \in C(I).$$

Il problema che adesso ci poniamo è quello di introdurre una distanza sulle funzioni continue su I.
Tale nozione ci è utile per metterci d'accordo su quando una funzione è vicina ad un'altra nell'intervallo preso in considerazione.
Ricordiamo che i tre assiomi della distanza prevedono: se d è ~~della funzione~~ una distanza su uno spazio vettoriale X, allora:

1) $d(u,v) = 0 \iff u \equiv v$
2) $d(u,v) = d(v,u) \quad \forall u, v \in X$
3) $\forall u, v, w \in X$, si ha $d(u,v) \leq d(u,w) + d(w,v)$.

Nel grafico qui sotto rappresentiamo due funzioni continue f e g nell'intervallo $I = [a,b]$.



Riportiamo qui di seguito tre diverse ~~nozioni di~~ possibili di distanza.

ESEMPIO 1 - Introduciamo la seguente nozione di distanza:

$$d(f,g) = \max_{t\in[a,b]} |f(t)-g(t)|$$

ovvero la distanza tra f e g è data dal massimo divario tra le funzioni su tutto l'intervallo. Notiamo che $f-g$ è continua, così come $|f-g|$, per cui il max su un intervallo chiuso e limitato esiste sempre (teorema di Weierstrass).
In base a tale nozione di distanza, due funzioni sono lontane se lo sono in un punto: ossia, i due grafici potrebbero essere molto vicini dappertutto e distanziarsi di molto in un intervallo molto piccolo per risultare molto distanti.
Si lascia allo studente la verifica che trattasi di una nozione di distanza (verificando cioè gli assiomi prima richiamati).

Esempio 2 - Introduciamo adesso una seconda nozione di distanza, legata all'area della regione compresa tra i due grafici:

$$d(f,g) = \int_a^b |f(t)-g(t)|\,dt$$

Si verifica che anche in questo caso gli assiomi della distanza sono verificati. A differenza della nozione introdotta nell'esempio 1, due funzioni sono qui vicine purché l'area compresa tra i due grafici è piccola; se le due funzioni si allontanano di molto in un intervallo molto piccolo, possono risultare lo stesso particolarmente vicine.

ESEMPIO 3 - Introduciamo, infine, una terza nozione di distanza, variante di quella introdotta nell'esempio 2:

$$d(f,g)=\left(\int_a^b |f(t)-g(t)|^2\,dt\right)^{1/2}$$

Si verifica che anche la nuova definizione verifica i tre assiomi della distanza.

Tale nozione di distanza risulta a prima vista meno intuitiva. Tuttavia in molti contesti (fisica, quando si valutano le variazioni di energia cinetica; probabilità, relativamente alla nozione di scarto quadratico; etc.) tale nozione di distanza assume rilevanza maggiore delle due precedentemente introdotte.

Anche qui due funzioni sono vicine quando l'area tra i due grafici è piccola. Inoltre, valutando il quadrato della differenza tra le due funzioni, laddove tale valore è minore di 1, il quadrato sarà inferiore rispetto al valore preso in considerazione come integrando nella definizione 2.

I tre esempi di distanza sopra introdotti giocano un ruolo fondamentale in matematica. Spesso la scelta della nozione di distanza opportuna è fondamentale per impostare adeguatamente un dato problema.

Notiamo adesso che, nello spazio vettoriale delle funzioni continue su I, le tre nozioni di distanza sopra presentate risultano invarianti per traslazione:

$$\forall u,v,w\in C(I),\quad d(u+w,\,v+w)=d(u,v).$$

Di conseguenza, $\quad d(f,g)=d(f-g,\,0)$

e quindi le distanze tra due elementi sono note se è nota la distanza di un elemento dall'origine, che chiameremo NORMA

$\forall x \in \mathcal{C}(I)$, $d(x,0) = \|x\|$.

Notiamo, inoltre, che le tre distanze (e le corrispondenti norme) sopra presentate ~~~~ si possono estendere a spazi di funzioni ~~~~ definite su ~~~~ un insieme della retta reale che non sia necessariamente un intervallo chiuso e limitato e che non siano necessariamente continue. ~~In particolare, pensiamo alle funzioni~~

ESEMPIO 1 BIS - Nel caso dell'esempio 1 l'estensione è possibile alle funzioni LIMITATE su un intervallo della retta reale. E' però necessario modificare la nozione di distanza nel modo seguente:

$$d(f,g) = \sup_{t \in I} |f(t) - g(t)|$$

Non valendo più il teorema di Weierstrass, è stato necessario sostituire il massimo con l'estremo superiore (che esiste sempre!). Tale distanza (e la corrispondente norma) prendono il nome di distanza (norma) dell'estremo superiore e indicate con

$$d_\infty(f,g) = \|f-g\|_\infty$$

ESEMPIO 2 BIS - Nel caso dell'esempio 2, l'estensione è possibile alle funzioni Integrabili su un intervallo misurabile della retta reale. ~~~~ Tale distanza prende il nome di distanza integrale e indicata con

$$d_1(f,g) = \|f-g\|_1 = \int_I |f(t) - g(t)|\, dt$$

ESEMPIO 3 BIS - ~~...~~ Anche nel caso dell'esempio 3, l'estensione è possibile alle funzioni a quadrato integrabile su un intervallo misurabile della retta reale. Tale distanza prende il nome di distanza delle funzioni a quadrato integrabile e viene indicata con

$$d_2(f,g) = \|f-g\|_2 = \left(\int_I |f(t)-g(t)|^2 dt\right)^{1/2}$$

Le notazioni d_∞, d_1 e d_2 ($\|\cdot\|_\infty$, $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ rispettivamente) sono universalmente riconosciute nella letteratura matematica attualmente in uso.

ESEMPIO

Si consideri la successione di funzioni $f_n \in C([0,1])$ così definite:

$$f_n(t) = e^{-nt}$$

Per ogni $t \in [0,1]$, calcoliamo $\lim_{n\to\infty} f_n(t)$. Si ha

$$\lim_{n\to\infty} e^{-nt} = \begin{cases} 1 & \text{se } t=0 \\ 0 & \text{se } t \in (0,1]. \end{cases}$$

Indichiamo con f_∞ tale funzione limite: $f_\infty(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t=0 \\ 0 & \text{se } t \in (0,1] \end{cases}$

~~Notiamo che f_n converge puntualmente~~

Calcoliamo ora la distanza tra le due funzioni f_n ed f_∞ rispetto alle tre norme prima introdotte e successivamente il limite della distanza per $n \to \infty$. Si ha

a) $d_\infty(f_n, f_\infty) = \sup_{t\in[0,1]} |f_n(t) - f_\infty(t)| = \sup_{t\in(0,1]} |f_n(t) - f_\infty(t)| =$

$$= \sup_{t\in(0,1]} |e^{-nt}| = \sup_{t\in[0,1]} e^{-nt} = \max_{t\in[0,1]} e^{-nt} = 1$$

per cui
$$\lim_{n\to\infty} d_\infty(f_n, f_\infty) = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$$

b) $$d_1(f_n, f_\infty) = \int_0^1 |e^{-nt}|\,dt = \int_0^1 e^{-nt}\,dt =$$
$$= -\frac{1}{n} e^{-nt}\Big|_{t=0}^{t=1} = -\frac{1}{n}\left(e^{-n} - 1\right)$$

per cui $$\lim_{n\to\infty} d_1(f_n, f_\infty) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{e^n}\right) = 0$$

c) $$d_2(f_n, f_\infty) = \left(\int_0^1 |e^{-nt}|^2\,dt\right)^{1/2} = \left(\int_0^1 e^{-2nt}\,dt\right)^{1/2} =$$
$$= \left(-\frac{1}{2n} e^{-2nt}\Big|_{t=0}^{t=1}\right)^{1/2} = \left(-\frac{1}{2n}\left(e^{-2n} - 1\right)\right)^{1/2}$$

per cui $$\lim_{n\to\infty} d_2(f_n, f_\infty) = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{1}{2n}\left(1 - \frac{1}{e^{2n}}\right)} = 0$$

Notiamo perciò che la successione f_n converge al suo limite puntuale sia rispetto alla ~~norma~~ distanza d_1, sia rispetto alla distanza d_2, mentre non converge rispetto alla distanza d_∞.

DEFINIZIONE (Successione di Cauchy in uno spazio normato)
Sia X uno spazio vettoriale dotato della norma $\|\cdot\|$.
Una successione $\{x_n\}$ di elementi dello spazio vettoriale X si dice ~~[illegible]~~ di Cauchy se:
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N > 0$ t.c. ~~[illegible]~~ $\forall p > N$, $\forall q > N$
si ha $$\|x_p - x_q\| < \varepsilon$$

TEOREMA
Ogni successione convergente rispetto alla norma $\|\cdot\|$ è di Cauchy rispetto alla stessa norma.

DEFINIZIONE (COMPLETEZZA)

Uno spazio vettoriale X dotato di una norma $\|\cdot\|$ si dice COMPLETO se in esso ogni successione di Cauchy converge verso un elemento dello spazio vettoriale stesso.

DEFINIZIONE (spazio di BANACH)

Uno spazio vettoriale X, dotato di una norma $\|\cdot\|$ si dice spazio di Banach se esso risulta completo.

La nozione di spazio di Banach ha notevole rilevanza nell'analisi matematica moderna. Tuttavia, in questo corso, la utilizzeremo soltanto per ~~esp~~ indicare in modo stringato le proprietà che caratterizzano determinati spazi vettoriali normati.

TEOREMA (completezza dello spazio delle funzioni limitate)

Lo spazio vettoriale delle funzioni limitate definite su $I \subset \mathbb{R}$, con la norma dell'estremo superiore $\|\cdot\|_{\infty, I}$, risulta completo.

SUCCESSIONI DI FUNZIONI E LORO CONVERGENZA

Sia $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $f_n : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$,

una successione di funzioni. ~~[illegible]~~ In base a quanto visto nel paragrafo precedente, abbiamo a disposizione due differenti concetti di convergenza:

DEFINIZIONE (convergenza puntuale)
Diremo che $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge puntualmente a f_∞,

$f_n, f_\infty : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, se $\forall t \in I$ si ha

$$\lim_{n\to\infty} f_n(t) = f_\infty(t).$$

Indicheremo tale convergenza convenzionalmente con

$$f_n \xrightarrow{n\to\infty} f_\infty \qquad \forall t \in I.$$

DEFINIZIONE (convergenza uniforme)
Diremo che $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a f_∞ su I, $f_n, f_\infty : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, se

$$\lim_{n\to\infty} \| f_n - f_\infty \|_{\infty, I} = 0, \quad \text{ossia}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sup_{t\in I} |f_n(t) - f_\infty(t)| \right) = 0$$

Indicheremo tale convergenza convenzionalmente attraverso il simbolo

$$f_n \overset{n\to\infty}{\rightrightarrows} f_\infty \qquad \text{su } I.$$

OSSERVAZIONE

Nel paragrafo precedente, attraverso l'esempio della successione $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $f_n : [0,1] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f_n(t) = e^{-nt}$,

abbiamo visto che esistono successioni che convergono puntualmente ma non uniformemente.

La ~~successione~~ convergenza uniforme in un intervallo è, dunque, più forte della convergenza puntuale nello stesso intervallo.

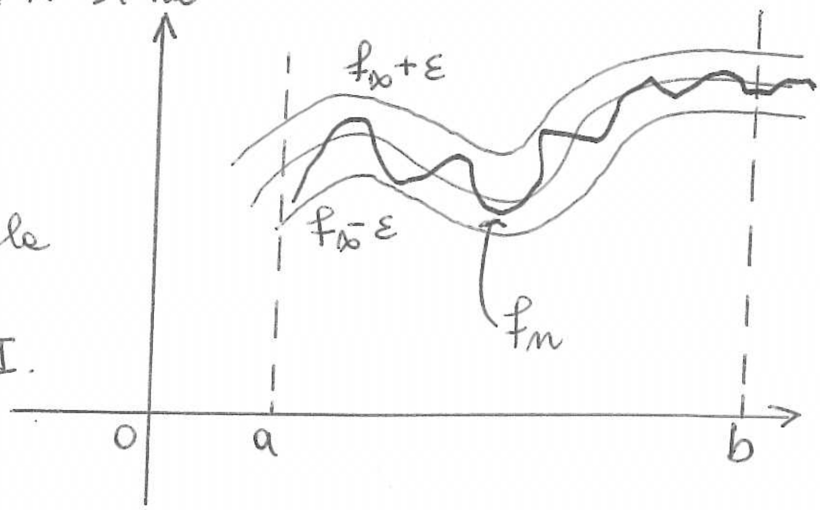
Graficamente, a partire dalla funzione limite f_∞, si consideri la striscia che va da $f_\infty(t) - \varepsilon$ ad $f_\infty(t) + \varepsilon$.

La definizione di convergenza uniforme,

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N > 0$ t.c. $\forall n > N$ si ha

$$\sup_{t\in I} |f_n(t) - f_\infty(t)| < \varepsilon$$

corrisponde ad imporre che la f_n ha grafico dentro tale striscia su tutto l'intervallo I.



Sussiste il seguente risultato

TEOREMA (scambio dei limiti)

Sia $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni, $f_n : (a,b) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, e supponiamo che, per $t_0 \in (a,b)$ fissato, $\forall n \in \mathbb{N}$ $\exists \lim_{t\to t_0} f_n(t) = \ell_n \in \mathbb{R}$.

Supponiamo, inoltre, che la successione converge uniformemente nell'intervallo (a,b) ad una funzione f_∞.

Allora

- $\exists \lim_{n\to\infty} \ell_n$
- $\exists \lim_{t\to t_0} f_\infty(t)$

e i due limiti coincidono, ovvero

$$\lim_{n\to\infty}\left(\lim_{t\to t_0} f_n(t)\right) = \lim_{t\to t_0}\left(\lim_{n\to\infty} f_n(t)\right)$$

Corollario

Sia $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni, $f_n : (a,b) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n \in C((a,b))$ e supponiamo $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f_\infty$ in (a,b). Allora $f_\infty \in C((a,b))$

OSSERVAZIONE: ~~I due teoremi~~ Il teorema ed il relativo corollario sussistono anche ~~per~~ quando al posto dell'intervallo (a,b) si prende in considerazione un qualunque intervallo (chiuso, aperto, chiuso da un lato e aperto dall'altro) della retta reale.

OSSERVAZIONE. Il corollario appena ~~dimostrato~~ enunciato ~~a~~ afferma che lo spazio delle funzioni continue su un intervallo I, dotato della norma dell'estremo superiore $\|\cdot\|_{\infty, I}$, è uno spazio di Banach.