APPROSSIMAZIONE DI FUNZIONI

CENNI SUGLI SPAZI FUNZIONALI

Per affrontare lo studio dell'approssimazione delle funzioni è necessario introdurre alcuni rudimenti di Analisi Funzionale.

Nel seguito daremo per noto il concetto di spazio vettoriale, di distanza euclidea su $\mathbb{R}^n$ e di prodotto scalare (sempre su $\mathbb{R}^n$).

DEF. (Spazio metrico). La coppia (X, d) si dice spazio metrico se X è un insieme ~~...~~ mentre d è una distanza

$$d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$$

tale che $\forall x, y, z \in X$ valgono le proprietà

1) $d(x,y) \geq 0$ e $d(x,y) = 0 \iff x = y$
2) $d(x,y) = d(y,x)$ (SIMMETRIA)
3) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,x)$ (dis. triangolare)

Nel seguito avremo a che fare con spazi metrici esclusivamente nel caso in cui X è uno spazio vettoriale.

ESEMPIO 1

$(\mathbb{R}^2, d)$, con $d(x,y) = \|x-y\| =$

$$= \left(\sum_{k=1}^{2} |x_k - y_k|^2 \right)^{1/2}$$

è uno spazio metrico. La distanza d è in questo caso la distanza euclidea (formula di Pitagora).
Analogamente, è uno spazio metrico

$(\mathbb{R}^n, d)$, dove $d(x,y) = \|x-y\| =$

$$= \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|^2}$$

Altre possibili metriche su $\mathbb{R}^n$ sono

$$d_1(x,y) = \sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k| ,$$

$$d_\infty(x,y) = \max_{1 \le k \le n} |x_k - y_k|$$

DEFINIZIONE (intorno circolare)

Se (X, d) è uno spazio metrico e $x \in X$, definiamo INTORNO DI x DI RAGGIO r l'insieme

$$B_r(x) = \{ y \in X : d(x, y) < r \}$$

DEFINIZIONE (Successione convergente)

Sia (X, d) uno spazio metrico e $\{x_n\}$ una successione a valori in X; essa si dirà convergente a un punto $x \in X$ se ~~___~~

$$\lim_{n \to \infty} d(x_n, x) = 0.$$

DEFINIZIONE (successione di Cauchy)

Sia (X, d) uno spazio metrico e $\{x_n\}$ una successione a valori in X. Diremo che $\{x_n\}$ è una successione di Cauchy se

$$\lim_{n, m \to \infty} d(x_n, x_m) = 0.$$

Si osservi che è facile dimostrare che ogni successione convergente è di Cauchy.

Nel corso di Analisi Matematica I si è anche dimostrato che ogni successione numerica a valori

in $\mathbb{R}$ che risulti di Cauchy, allora è convergente. Tale risultato si generalizza banalmente in $\mathbb{R}^n$ usando una delle distanze prima introdotte, in particolare quella euclidea.
Tale risultato, tuttavia, non vale su un generico spazio metrico.

DEFINIZIONE (SPAZIO METRICO COMPLETO)

Uno spazio metrico (X, d) per il quale ogni successione di Cauchy è convergente si dice spazio metrico completo o di BANACH.

In base a questa definizione, dunque, $(\mathbb{R}^2, d)$ e $(\mathbb{R}^n, d)$ così come presentati nell'esempio 1 sono spazi di Banach. Sono di Banach anche $(\mathbb{R}^n, d_1)$ e $(\mathbb{R}^n, d_\infty)$. Chiaramente la forma degli intorni cambia al variare della distanza utilizzata. Tuttavia, almeno nel caso di $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$ si dimostra facilmente che le varie metriche introdotte nell'esempio 1 sono tutte equivalenti fra loro, nel senso che che esistono due costanti positive m_k ed M_k tali che $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$:

$$m_1 d_1(x,y) \leq d(x,y) \leq M_1 d_1(x,y),$$

$$m_2 d_\infty(x,y) \leq d(x,y) \leq M_2 d_\infty(x,y)$$

$$m_3 d_\infty(x,y) \leq d_1(x,y) \leq M_3 d_\infty(x,y).$$

Altri esempi di spazi metrici

ESEMPIO 2

Lo spazio delle funzioni continue su un intervallo chiuso e limitato della retta reale I,
$C(I)$ con la distanza $\forall f, g \in C(I)$
data da

$$d(f, g) = \max_{x \in I} |f(x) - g(x)|$$

è uno spazio metrico.
Vedremo più avanti che tale spazio è anche completo, per cui si tratta di uno spazio di Banach.

ESEMPIO 3

Lo spazio delle funzioni continue su un intervallo chiuso e limitato della retta reale $I = [a, b]$,
$C(I)$ con la distanza $\forall f, g \in C(I)$
data da

$$d_1(f, g) = \int_a^b |f(x) - g(x)| \, dx$$

è uno spazio metrico. In tal caso si dimostra che non è uno spazio di Banach

ESEMPIO 4

Lo spazio delle funzioni limitate e integrabili secondo Riemann sull'intervallo $I \subset \mathbb{R}$ chiuso e limitato, $I = [a,b]$ con la ~~xxxxxx~~ distanza $\forall f, g$

$$d(f,g) = \int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx$$

è uno spazio metrico. Anche questo spazio metrico non risulta completo.

ESEMPIO 5

Lo spazio delle funzioni limitate e a quadrato integrabile secondo Riemann sull'intervallo $I = [a,b] \subset \mathbb{R}$ chiuso e limitato, con la distanza $\forall f, g$

$$d(f,g) = \sqrt{\int_a^b |f(x) - g(x)|^2 dx}$$

è uno spazio metrico. Anche questo spazio metrico non risulta completo.

ESEMPIO 6

Sia $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo chiuso e limitato (compatto) della retta reale.
Nello spazio $C^1(I)$ introduciamo la metrica

$$d(f,g) = \max_{x\in I} |f(x)-g(x)| + \max_{x \in I} |f'(x)-g'(x)|.$$

Allora $(C^1(I), d)$ è uno spazio metrico. ~~completo (ossia spazio di Banach)~~. Vedremo più avanti che si tratta di uno spazio di Banach (ossia che lo spazio risulta anche completo).

Analogamente nello spazio $C^k(I)$ possiamo introdurre la metrica

$$d(f,g) = \sum_{n=0}^{k} \max_{0\le n\le k} |f(x)-g(x)| .$$

Allora

$$(C^k(I), d)$$

è uno spazio di Banach.

Completamento di uno spazio metrico.

La completezza è una proprietà molto ~~[illegible]~~ utile quando si ha a che fare con uno spazio metrico. Alcuni spazi ~~[illegible]~~ metrici, però, non lo sono. Questo ~~[illegible]~~ è il caso, ~~per esempio~~ degli esempi 4 e 5 prima richiamati. In pratica, esistono successioni di Cauchy che, ~~non convergono ad elementi~~ seppur convergendo, lo fanno verso un elemento che non fa parte dello spazio stesso.

In tutti quei casi in cui lo spazio ~~[illegible]~~ metrico (X, d) non risulta completo, si segue un processo di completamento dello spazio metrico stesso: ~~per ogni successione di Cauchy $\{x_n\}$ il cui limite $x \notin X$, si a~~ in pratica si amplia lo spazio X aggiungendovi tutti quegli elementi $x \notin X$ che sono limiti di successioni di Cauchy.

~~Il nuovo spazio completamento~~ Non descriveremo qui i dettagli di tale operazione, ma il risultato finale è un nuovo spazio $(\tilde{X}, \tilde{d})$ nel quale $X \subsetneq \tilde{X}$ mentre $\tilde{d}_{|X} \equiv d$ e che risulta ora uno spazio metrico completo (ovvero di Banach).

<u>Osservazione</u>: In particolare lo spazio che ~~[illegible]~~ si ottiene dal completamento dello spazio metrico dell'esempio 4 è lo spazio $(L^1([a,b]), d)$

delle funzioni integrabili secondo Lebesgue in (a,b), mentre lo spazio che si ottiene ~~dal~~ completamento dello spazio metrico dell'esempio 5 è lo spazio $L^2((a,b),d)$ delle funzioni a quadrato integrabile secondo Lebesgue in (a,b).

~~SPAZIO NORMATO~~

~~Uno spazio~~

OSSERVAZIONE

La scelta della distanza su un determinato insieme ~~[illegible]~~ dipende dal contesto, ma può essere una questione molto importante. Inoltre, partendo dallo stesso insieme ~~per esempio~~ e utilizzando due diverse ~~[illegible]~~ distanze, dopo l'operazione di completamento si giunge a due diversi spazi di Banach. Per esempio, a partire dall'insieme delle funzioni continue su $[a,b]$, $C([a,b])$, utilizzando ~~rispettivamente~~ la norma

$$d_1(f,g) = \int_a^b |f(t)-g(t)|\,dt$$

e operando il completamento si perviene allo spazio di Banach $L^1((a,b))$, mentre utilizzando la norma

$$d_2(f,g) = \sqrt{\int_a^b |f(t)-g(t)|\,dt}$$

si perviene per completamento allo spazio di Banach $L^2((a,b))$.

SPAZI VETTORIALI NORMATI

In tutti gli esempi precedenti in effetti l'insieme X era uno spazio vettoriale mentre la distanza d era invariante per traslazione:

$\forall x, y, a$ si ha $d(x,y) = d(x+a, y+a)$

In particolare, se $a = -y$ si ottiene

$$d(x,y) = d(x-y, 0),$$

ovvero la distanza fra due elementi qualsiasi si riconduce alla distanza di un elemento qualsiasi dall'origine. Scriviamo allora

$$d(x,0) = \|x\|.$$

Se risulta poi che la distanza sono anche omotetiche, ovvero

$\forall \lambda$ scalare ($\mathbb{R}$ oppure $\mathbb{C}$ a seconda dei casi) $\forall x \in X$ si ha $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$,

~~allora vuol dire che~~ giungiamo alla seguente definizione di norma:

$\|\cdot\| : X \longrightarrow \mathbb{R}$ è una norma per lo spazio vettoriale X se

$\|x\| \geq 0 \quad \forall x$ e $\|x\| = 0 \iff x = 0$

$\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\| \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \, (o \in \mathbb{C}), \forall x \in X$

$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (dis. triangolare).

Assegnata in uno spazio vettoriale X una norma $\|\cdot\|$, si induce in X una distanza d ponendo

$$d(x,y)=\|x-y\|.$$

Viceversa, data la distanza d, si può passare alla norma $\|\cdot\|$ mediante la relazione $\|x\| = d(x,0)$.

Si parla perciò di uno spazio normato. Se risulta anche completo, si dice ancora che è uno spazio di Banach.

In alcuni casi poi, la norma è indotta da un prodotto scalare definito sullo spazio vettoriale X.
Ovvero $\|x\|=\sqrt{\langle x,x\rangle}$, dove $\langle\cdot,\cdot\rangle$ è un prodotto scalare.

~~È questo il caso~~

ESEMPIO 1 – Se $X=\mathbb{R}^n$, la distanza euclidea è indotta dal prodotto scalare

$$\langle x,y\rangle=\sum_{k=1}^{n} x_k y_k \Longrightarrow \|x\|=\sqrt{\langle x,x\rangle} \text{ e}$$

$$d(x,y)=\|x-y\|=\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(x_k-y_k)^2}$$

ESEMPIO 2 In $L^2(a,b)$ è definito il prodotto scalare (supponiamo che le funzioni siano a valori complessi):

$$<f,g> = \int_a^b f(t)\,\overline{g(t)}\,dt$$

da cui

$$\|f\| = \sqrt{\int_a^b f(t)\,\overline{f(t)}\,dt} = \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2 dt}$$

Chiaramente nel caso in cui le funzioni sono a valori reali si può omettere il coniugato nella seconda funzione.

DEFINIZIONE - Uno spazio di Banach nel quale la norma è indotta da un prodotto scalare prende il nome di spazio di Hilbert.

Riprenderemo la discussione circa gli spazi di Hilbert prima di presentare le serie di Fourier.