SERIE DI FOURIER

Un ulteriore capitolo importante nell'ambito della teoria dell'approssimazione è costituito dalle serie di Fourier. In questo caso il problema è notevolmente diverso rispetto a quello affrontato mediante le serie di Taylor. Precisamente, consideriamo ora lo spazio di Hilbert delle funzioni a quadrato integrabile definite in un intervallo limitato della retta reale $[a,b)$, che indicheremo con $L^2((a,b))$.

Per prima cosa facciamo notare che non vi è differenza tra considerare una funzione

$$f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

e considerare la funzione $\tilde{f}$ periodica di periodo $T = b - a$ che coincide con f nell'intervallo $[a,b)$: infatti, $\tilde{f}$ si ottiene dalla f estendendola per periodicità fuori dell'intervallo $[a,b)$.

Nel seguito, dunque, ~~preferiamo~~ quando vorremo riferirci a $L^2((a,b))$ come lo spazio delle funzioni periodiche e a quadrato integrabile su (a,b), preferiremo usare la notazione $L^2(b-a)$.

Per una questione di comodità, assumeremo nel seguito $b-a=2\pi$ e ci riferiremo dunque allo spazio $L^2(2\pi)$ con il prodotto scalare

$$<f,g> = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,g(t)\,dt \qquad \forall f,g \in L^2(2\pi).$$

Si noti che per alcune applicazioni potrà essere utile ~~utilizzare~~ riferirsi allo spazio $L^2(2\pi)$ delle funzioni a quadrato integrabile e 2π-periodiche a valori complessi: l'unico adattamento che occorre effettuare in tal caso è che il prodotto scalare va definito come

$$<f,g> = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\overline{g(t)}\,dt \qquad \forall f,g \in L^2(2\pi),$$

in modo che la norma indotta sia in ogni caso

$$\|f\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2\,dt} \qquad \forall f \in L^2(2\pi).$$

DEF.: Uno spazio di Hilbert H è detto <u>separabile</u> se ha una base ortonormale S di cardinalità al più numerabile.

Si tratta di stabilire ora se lo spazio $L^2(2\pi)$ con il prodotto scalare sopra definito è separabile.

Notiamo che l'insieme

$$\tilde{S} = \left\{ 1,\ \operatorname{sen}(kx),\ \cos(kx) \right\}_{k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$$

~~Il nuovo insieme~~ ha tutti gli elementi fra loro ~~linearmente indipendenti~~ ortogonali. Infatti, è facile verificare che

$$< 1, \operatorname{sen}(kx) > = 0 \qquad \forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

$$< 1, \cos(kx) > = 0 \qquad \text{"}$$

$$< \operatorname{sen}(hx), \cos(kx) > = 0 \qquad \forall h, \forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

Inoltre risulta

$$\| 1 \| = \sqrt{< 1, 1 >} = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot 1 \, dx} = \sqrt{2\pi}$$

$$\| \operatorname{sen}(kx) \| = \sqrt{< \operatorname{sen}(kx), \operatorname{sen}(kx) >} =$$

$$= \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}^2(kx) \, dx} = \sqrt{\pi}$$

$$\| \cos(kx) \| = \sqrt{< \cos(kx), \cos(kx) >} =$$

$$= \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(kx) \, dx} = \sqrt{\pi}$$

Perciò, l'insieme

$$S = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ \frac{\operatorname{sen}(kx)}{\sqrt{\pi}},\ \frac{\cos(kx)}{\sqrt{\pi}} \right\}_{k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$$

è costituito da funzioni fra loro ortonormali e, di conseguenza, linearmente indipendenti.

E' poi valido il seguente risultato, di fondamentale importanza

TEOREMA

Lo spazio di Hilbert $L^2(2\pi)$ munito del prodotto scalare

$$<f,g> = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\overline{g(t)}\,dt$$

è separabile e una sua base ortonormale è data da

$$S = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos(kx)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\operatorname{sen}(kx)}{\sqrt{\pi}} \right\}.$$

Pertanto, data $f \in L^2(2\pi)$, è possibile trovare due successioni $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{\beta_n\}_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ tali che in $L^2(2\pi)$ valga l'uguaglianza:

$$f(x) = \alpha_0 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \frac{\cos(kx)}{\sqrt{\pi}} + \beta_k \frac{\operatorname{sen}(kx)}{\sqrt{\pi}} \quad (*)$$

La relazione $(*)$ va interpretata come generalizzazione di ciò che avveniva in $\mathbb{R}^2$ (e più generalmente in $\mathbb{R}^n$) munito del classico prodotto scalare:

$\forall x \in \mathbb{R}^2$, detti $x_1 = <x, e_1>$ e $x_2 = <x, e_2>$, si ha $x = x_1 e_1 + x_2 e_2$.

Perciò, nel caso di $L^2(2\pi)$, si ha

$$\alpha_0 = \langle f, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, dx$$

$$\alpha_k = \langle f, \frac{\cos(kx)}{\sqrt{\pi}} \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \frac{\cos(kx)}{\sqrt{\pi}}\, dx$$

$$\beta_k = \langle f, \frac{\mathrm{sen}(kx)}{\sqrt{\pi}} \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \frac{\mathrm{sen}(kx)}{\sqrt{\pi}}\, dx$$

per $k \geq 1$.

I coefficienti α_0, α_k e β_k sono detti coefficienti di Fourier e la corrispondente combinazione lineare infinita a destra dell'uguaglianza nella (*) è detta serie di Fourier della funzione f.

Tuttavia va osservato che l'espressione (*) e i corrispondenti coefficienti or ora calcolati si semplificano se si opera la seguente scelta: scrivere la f come combinazione lineare infinita rispetto alla base (non più ortonormale!)

$$\hat{S} = \left\{ \frac{1}{2},\ \cos(kx),\ \mathrm{sen}(kx) \right\}_{k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$$

ovvero

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \,\mathrm{sen}(kx) \qquad (**)$$

dove ora di conseguenza si ha (confrontando (*) e (**)):

$$\begin{cases} \dfrac{a_0}{2} = \dfrac{\alpha_0}{\sqrt{2\pi}} \\ \dfrac{\alpha_k}{\sqrt{\pi}} = a_k \\ \dfrac{\beta_k}{\sqrt{\pi}} = b_k \end{cases}$$

da cui

$$a_0 = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\,\alpha_0 = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$$

$$a_k = \frac{\alpha_k}{\sqrt{\pi}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\frac{\cos(kx)}{\sqrt{\pi}}\,dx =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)\,dx$$

$$b_k = \frac{\alpha_k}{\sqrt{\pi}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\frac{\operatorname{sen}(kx)}{\sqrt{\pi}}\,dx =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\operatorname{sen}(kx)\,dx\,,$$

dalle quali si deduce poi che l'espressione di a_0 si può considerare un caso particolare di quella di a_k per $k=0$.

Si osservi ora che la struttura di spazio di Hilbert per $L^2(2\pi)$ ~~ha un'immediata conseguenza~~ ha un'importante conseguenza riguardo ~~...~~ l'approssimazione di funzioni.

Se ~~...~~ consideriamo infatti il polinomio trigonometrico

$$P_M(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kx) + b_k \operatorname{sen}(kx),$$

è facile interpretarlo come la proiezione della funzione f nel sottospazio vettoriale V di dimensione $2M+1$ generato da

$$\left\{\frac{1}{2}, \cos(kx), \operatorname{sen}(kx)\right\}_{k=1,\dots,n.}$$

Tale polinomio trigonometrico è ~~poi~~ inoltre l'elemento di minima distanza (indotta dal prodotto scalare) da f dentro il sottospazio V stesso, vale a dire è la miglior approssimazione di f nel sottospazio vettoriale finito dimensionale V.

Osserviamo inoltre che, la classica decomposizione di una funzione di variabile reale f come

$$f(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2} + \frac{f(x)-f(-x)}{2}$$

nella sua parte pari e dispari rispettivamente dà luogo a due sottospazi vettoriali dentro $L^2(2\pi)$ fra di loro ortogonali e tali che la loro somma è tutto $L^2(2\pi)$:

$$L^2(2\pi) = L^2_{pari}(2\pi) \oplus L^2_{dispari}(2\pi),$$

$$f(x) = f_p(x) \oplus f_d(x)$$

con $f_p(x) = \dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$

e $f_d(x) = \dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$

e $\langle f_p(x), f_d(x) \rangle = 0$.

In particolare, per ogni funzione pari lo sviluppo di Fourier (**) ha i coefficienti $b_k \equiv 0$, mentre per ogni funzione dispari si ha $a_k \equiv 0$ $\forall\, k = 0, 1, 2, \dots$.

~~FUNZIONI PERIODICHE DI PERIODO DIVERSO DA 2π.~~

Inoltre per una funzione f pari si ha:

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(kx)\,dx$$

mentre per una funzione f dispari si ha:

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{sen}(kx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,\mathrm{sen}(kx)\,dx,$$

Funzioni periodiche di periodo diverso da 2π.

Sia $f \in L^2(T)$, $T > 0$. E' ovviamente possibile ripetere quanto detto in precedenza considerando adesso la base ortogonale

$$\left\{ \frac{1}{2} \, , \, \cos\left(k \frac{2\pi}{T} x\right) , \, \operatorname{sen}\left(k \frac{2\pi}{T} x\right) \right\}_{k \geq 1}$$

ottenendo ora lo sviluppo in serie di Fourier

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{2\pi k}{T} x\right) + b_k \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi k}{T} x\right)$$

con

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \cos\left(\frac{2\pi k}{T} x\right) dx$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi k}{T} x\right) dx .$$

Convergenza delle serie di Fourier

Sia $f \in L^2(2\pi)$ e sia

$$P_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kx) + b_k \operatorname{sen}(kx)$$

la somma parziale n-esima della serie di Fourier associata. Come già richiamato, preso un qualunque polinomio di Fourier dello stesso grado,

$$\sigma_n(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \cos(kx) + \beta_k \operatorname{sen}(kx)$$

e calcolata la distanza in L^2 tra f e σ_n, si dimostra che il minimo lo si ottiene quando σ_n coincide con P_n (teorema di proiezione) e si ha

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - P_n(x)|^2 dx + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |P_n(x)|^2 dx \quad (*)$$

Poiché poi

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |P_n(x)|^2 dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0^2}{4} + \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \cos^2(kx) +$$

$$+ b_k^2 \operatorname{sen}^2(kx)\, dx = \frac{1}{\pi}\left(2\pi \frac{a_0^2}{4} + \sum_{k=1}^{M}(a_k^2+b_k^2)\pi\right)$$

$$= \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{M}(a_k^2+b_k^2)$$

Pertanto

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{M}(a_k^2+b_k^2) \leq \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2 dx\,,$$

detta <u>disuguaglianza di Bessel</u>

Dalla (*), passando al limite quando $n \to \infty$, poiché

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-P_n(x)|^2 dx \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\,,$$

si ha

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2 dx\,,$$

detta <u>identità di Parseval</u>.

Come conseguenza risulta:

$$\begin{cases} \lim_{k\to\infty} a_k = 0 \\ \lim_{k\to\infty} b_k = 0 \end{cases}$$

(risultato noto come <u>Lemma di Riemann</u>)

TEOREMA DI CONVERGENZA PUNTUALE DI DINI

Sia $f \in L^2(2\pi)$ e sia $x_0 \in \mathbb{R}$ per il quale esistono

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell^- \in \mathbb{R}, \quad \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell^+ \in \mathbb{R}$$

e supponiamo inoltre che esistono finiti

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - \ell^-}{x - x_0} \quad e \quad \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - \ell^+}{x - x_0}$$

(dette rispettivamente pseudo derivate sinistra e destra).
Allora la serie di Fourier della f converge puntualmente in x_0 al valore

$$\frac{\ell^- + \ell^+}{2}$$

PRIMO TEOREMA DI CONVERGENZA UNIFORME

Sia $f \in L^2(2\pi)$ ~~con $f' \in L^2(2\pi)$~~
e supponiamo che esiste $f' \in L^2(2\pi)$.
Allora la serie di Fourier associata ad f converge uniformemente ad f su tutto $\mathbb{R}$.

In particolare, se $f \in C^1(2\pi)$, spazio delle funzioni continue e 2π-periodiche, allora la serie di Fourier converge uniformemente alla funzione stessa.

Si osservi, inoltre, che se $f, f' \in L^2(2\pi)$, allora in particolare la funzione $f \in C(2\pi)$: condizione d'altra parte necessaria in base alla tesi del teorema precedente, visto che le $P_n \in C(2\pi)$ e $P_n \overset{}{\underset{n \to \infty}{\rightrightarrows}} f$.

SECONDO TEOREMA DI CONVERGENZA UNIFORME

Sia $f \in L^2(2\pi)$ e supponiamo che l'intervallo $[-\pi, \pi]$ si possa suddividere in un numero finito di sottointervalli in ognuno dei quali f è monotona. Allora la serie di Fourier di f converge uniformemente in ogni intervallo chiuso $[a, b]$ in cui f è continua.