Esercizio p. 54 7 a

Si calcoli $\int_\gamma \omega$ dove $\gamma : x(t) = a\cos t\, i + a \sin t\, j + b\, t\, k \quad t \in [0, 2\pi]$

$$\omega = (y-z)\,dx + (z-x)\,dy + (x-y)\,dz$$

$$\int_\gamma \omega = \int_0^{2\pi} \Big[(a\sin t - bt)(-a\sin t) + (bt - a\cos t)(a\cos t) + (a\cos t - a\sin t)\, b \Big]\, dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(-a^2 \sin^2 t + a b t \sin t + a b t \cos t - a^2 \cos^2 t + a b \cos t - a b \sin t \right) dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[a b \sin t\, (t-1) + a b \cos t\, (t+1) - a^2 \right] dt$$

$$= a b \int_0^{2\pi} t \sin t - a b \int_0^{2\pi} \sin t + a b \int_0^{2\pi} t \cos t + a b \int_0^{2\pi} \cos t - a^2 \int_0^{2\pi} =$$

$$= -2\pi a b - 2\pi a^2 = -2\pi a (b + a)$$

Esercizio

Dato il campo vettoriale $\bar{F}(x,y,z) = (3x^2y, x^3, -1/z)$

1) Individuare un dominio $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ t/c $\bar{F} \in C^1(\Omega)$

2) Verificare che $\bar{F}$ è irrotazionale

3) Calcolare, dove possibile, un potenziale per $\bar{F}$

1) $\bar{F} = (F_1, F_2, F_3) = (3x^2y, \; x^3, \; -1/z)$

$\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \; / \; z \neq 0\}$ $(= \mathbb{R}^3 \setminus \text{piano } xy)$

$\bar{F} \in C^1(\Omega)$

Nota: Ω non è connesso e quindi non semplicemente connesso

2)
$$\operatorname{rot} \bar{F} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = i\left(-\partial_y\left(\frac{1}{z}\right) - \partial_z(x^3)\right) + $$
$$- j\left(\partial_x\left(-\frac{1}{z}\right) - \partial_z(3x^2y)\right) + $$
$$+ k\left(\partial_x(x^3) - \partial_y(3x^2y)\right) =$$

$$= i \cdot 0 - j \cdot 0 + k \cdot 0 = \bar{0} \quad \forall (x,y,z) \in \Omega.$$

$\Rightarrow$ $\bar{F}$ è irrotazionale su Ω.

3)

Nota Ω non è semp. connesso, quindi non posso dedurre $\bar{F}$ conservativo su Ω.

~~Scelgo~~ Mi restringo a $\Omega_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / z > 0\}$

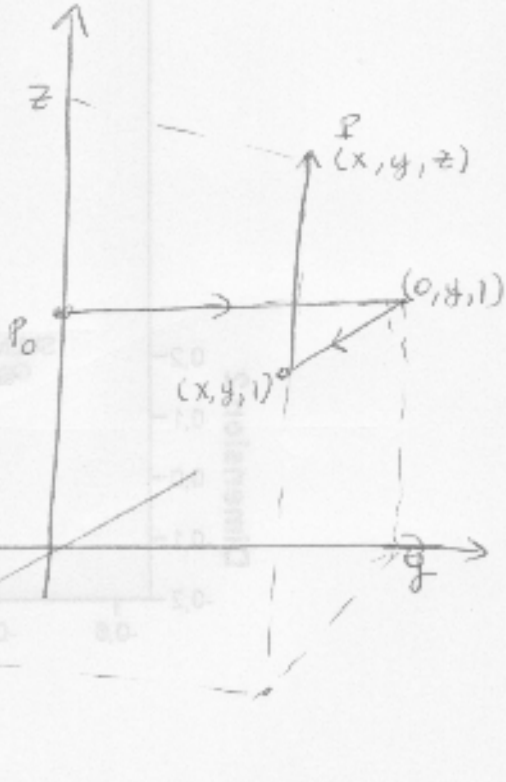
Ω_1 è semp. connesso $\Rightarrow$ $\bar{F}$ è conservativo su Ω_1

$\Rightarrow$ posso calcolare un potenziale

Calcolo del potenziale su Ω_1

$$U(x,y,z) = \int_{P_0}^{P} (F_1\,dx + F_2\,dy + F_3\,dz)$$

$P_0 = (x_0, y_0, z_0)$, $P = (x,y,z) \in \Omega_1$



Scelgo

$P_0 = (0,0,1)$

$$U(x,y,z) =$$

$$\int_0^y (x^3)\Big|_{(0,t,1)} dt + \int_0^x (3x^2 y)\Big|_{(t,y,1)} dt + \int_1^z \left(-\frac{1}{z}\right)\Big|_{(x,y,t)} dt =$$

$$= 0 + x^3 y - \log|z|$$

$\rightarrow$ sono in Ω_1 $\Rightarrow$ $z > 0$ $\Rightarrow$ $\log z$

$\Rightarrow$ $\boxed{V(x,y,z) = x^3 y - \log z}$ è un potenziale di $\bar{F}$ su Ω_1.

Esercizio (p. 7 n 1.5) ①

Sia dato il campo vettoriale

$$\overline{F}(x,y,z) = \left(\frac{z\,x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{z\,y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{1}{\sqrt[4]{z^3}} + \sqrt{x^2+y^2} \right)$$

1) Determinare il dominio di $\mathbb{R}^3$ in cui $\overline{F}$ è definito e C^1

2) Verificare che F è irrotazionale

3) Stabilire a priori che $\overline{F}$ è conservativo e, in caso affermativo, determinare un suo potenziale.

1

$$F_1 = \frac{z\,x}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad F_2 = \frac{z\,y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$F_3 = \frac{1}{\sqrt[4]{z^3}} + \sqrt{x^2+y^2}$$

F_1 def continua per $(x,y) \neq (0,0)$

F_2 def. continua " "

F_3 def. continua per $z > 0$

$\Rightarrow$ Dominio di definizione di $\overline{F}$:

$$\Omega = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, (x,y) \neq (0,0),\ z > 0 \}$$

$$F_{1x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(z x \,(x^2+y^2)^{-1/2} \right) =$$

$$= z\,(x^2+y^2)^{-1/2} - \frac{1}{2}\, z x \,(x^2+y^2)^{-3/2}\, 2x =$$

$$= \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{z x^2}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}$$

$$F_{1y} = -\frac{y x z}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}} \qquad F_{1z} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$F_{2x} = \frac{-z y x}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}} \qquad F_{2y} = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{z x^2}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}$$

$$F_{2z} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$F_{3x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad F_{3y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$F_{3z} = -\frac{3}{4} \cdot z^{-7/4}$$

<u>Nota</u> $\vec{F}$ è C^1 dove tutte le deriv. prime sono def. e continue.

$\longrightarrow \vec{F} \in C^1(\Omega)$

<u>Nota</u> Ω = Semispazio $z > 0$ meno ~~la retta~~ asse z (cioè retta per cui $(x,y) = (0,0)$)

$\longrightarrow$ non è semp. connesso

2 $\overline{F}$ è irrotazionale se

$$\frac{\partial F_3}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial z} \longrightarrow \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad \text{ok}$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial x} \longrightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad \text{ok}$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial y} \longrightarrow \frac{-xyz}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{-xyz}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad \text{ok}$$

$\Rightarrow$ $\overline{F}$ è irrotazionale.

3

$\overline{F}$ è irrotazionale ma Ω non è semp connesso.

Per stabilire a priori che $\overline{F}$ è conservativo devo dimostrare che che la circuitazione di F lungo una qualsiasi curva chiusa $\gamma \subset \Omega$ è nulla.

$\overline{F}$ irrotazionale $\Rightarrow$ il valore della circ. di $\overline{F}$ su γ non cambia se deformo γ in modo continuo.

Se $\gamma \subset \Omega$ può essere deformata in un p.to in modo continuo (rimanendo in Ω) la circuitazione di $\overline{F}$ su Ω è nulla.

Devo solo controllare le curve γ che girano attorno all'asse z.

Prendo γ:

$$\gamma(t): \begin{cases} x(t) = \cos(t) \\ y(t) = \sin(t) \\ z(t) = 1 \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi]$$

$$\gamma'(t) = \begin{cases} x'(t) = -\sin t \\ y'(t) = \cos t \\ z'(t) = 0 \end{cases}$$

Calcolo

$$\oint_\gamma \bar{F} = \int_0^{2\pi} \langle (F_1, F_2, F_3)\Big|_{(x(t), y(t), z(t))}, (x'(t), y'(t), z'(t)) \rangle \, dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \cos t \cdot (-\sin t)\, dt + \int_0^{2\pi} \sin t \cdot (\cos t)\, dt =$$

$$= -\int_0^{2\pi} \sin t \cos t \, dt + \int_0^{2\pi} \sin t \cos t \, dt = 0.$$

$\Rightarrow$ $\bar{F}$ è conservativo

- Cerco un potenziale U

U verifica
$$U_x = F_1$$
$$U_y = F_2$$
$$U_z = F_3$$

cioè:

a) $\frac{\partial}{\partial x} U(x, y, z) = \frac{z\,x}{\sqrt{x^2+y^2}}$

b) $\frac{\partial}{\partial y} U(x, y, z) = \frac{z\,y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

c) $\frac{\partial}{\partial z} U(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt[4]{z^3}} + \sqrt{x^2+y^2}$

Integro a) rispetto a x

$$\Rightarrow U(x, y, z) = \int \frac{z\,x}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dx \overset{+f(y,z)}{=} z\sqrt{x^2+y^2} + f(y, z)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial y} U(x, y, z) = \frac{z\,y}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{\partial}{\partial y} f(y, z)$$

uso b) e trovo

$$\frac{z\,y}{\sqrt{x^2+y^2}} + f_y(y, z) = \frac{z\,y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial y} f(y, z) = 0 \qquad \Rightarrow f(y, z) = g(z)$$

Quindi $U(x, y, z) = z\sqrt{x^2+y^2} + g(z)$

$$\frac{\partial}{\partial z} U(x, y, z) = \sqrt{x^2+y^2} + \frac{d}{dz} g(z)$$

uso c) e trovo $\sqrt{x^2+y^2} + \frac{dg}{dz}(z) = \frac{1}{\sqrt[4]{z^3}} + \sqrt{x^2+y^2}$

$$\Rightarrow \frac{dg}{dz}(z) = 1 / \sqrt[4]{z^3} \qquad \Rightarrow g(z) = 4\sqrt[4]{z} + K$$

$$\Rightarrow \boxed{U(x, y, z) = z\sqrt{x^2+y^2} + 4\sqrt[4]{z} + k} \qquad k \in \mathbb{R}$$

→ Potenziale del campo conservativo $\bar{F}$ in Ω.