Università degli Studi di L'Aquila

Facoltà di Ingegneria

Pag. 4 ES. 4 (1/2 ?)

A.A. 2001/02

Esercizi d'esame di Analisi Matematica 2

Docente: Bruno Rubino

Prima versione

Gli studenti sono vivamente invitati a segnalare eventuali errori al docente

Prima verifica di Analisi Matematica 2
Ingegneria Gestionale — Prof. B. Rubino

Cognome e nome:______________________________

Matricola:____________________ L'Aquila, 30 gennaio 2002

Esercizio 1

Scrivere in forma algebrica il numero complesso che in forma esponenziale è espresso da

$$w = 5e^{i\frac{\pi}{6}}$$

Risoluzione

Usando l'equivalenza tra forma esponenziale e trigonometrica si ha

$$w = 5\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = 5\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\,\frac{1}{2}\right) =$$

$$= \frac{5}{2}\sqrt{3} + i\,\frac{5}{2}$$

Esercizio 2

Sia dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'''' + y = t^3, \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 0, \quad y'''(0) = 6. \end{cases}$$

Dire se la sua soluzione è data da

a) $y(t) = 1 + t^3$.

b) $y(t) = t^3$.

c) $y(t) = 1 + 6t^3$.

d) $y(t) = 6t^3$.

Esercizio 3

Trovare la soluzione generale dell'equazione differenziale

$$y'' - y - 2y = 0.$$

Risoluzione

L'equazione è lineare omogenea del II ordine. Il polinomio caratteristico associato è dato da

$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$, $(\lambda+1)(\lambda-2) = 0$ per cui

$\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 2$ sono le due radici con molteplicità 1.

L'integrale generale è quindi

$y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Esercizio 4

Trovare la soluzione generale dell'equazione differenziale

$$y'''' - y = 0.$$

Risoluzione

L'equazione è lineare omogenea del IV ordine. Il polinomio caratteristico associato è dato da

$\lambda^4 - 1 = 0$, da cui le radici sono

$\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = i$, $\bar{\lambda}_3 = -i$, tutte con molteplicità 1.

L'integrale generale è quindi

$y(t) = c_1 e^{t} + c_2 e^{-t} + c_3 \operatorname{sen} t + c_4 \cos t$,

$c_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3, 4$.

Recupero prima verifica di Analisi Matematica 2
Ingegneria Gestionale — Prof. B. Rubino

Cognome e nome:______________________________

Matricola:______________________ L'Aquila, 18 marzo 2002

Esercizio 1

Scrivere in forma esponenziale il numero complesso che in forma algebrica è espresso da

$$w = 3 - 4i$$

Risoluzione

Si tratta di stabilire modulo e argomento.

$\rho = \sqrt{9+16} = 5$. Il punto sta nel quarto quadrante del piano di Gauss.

$\vartheta_0 = \operatorname{arctg}\left(-\frac{4}{3}\right) = -\operatorname{arctg}(4/3)$. Allora

$w = 5\, e^{-i \operatorname{arctg}(4/3)}$

Esercizio 2

Sia dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y^{(5)} + y = t^2, \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 2, \quad y'''(0) = 0, \quad y^{(4)} = 0. \end{cases}$$

Dire se la sua soluzione è data da

a) $y(t) = 1 + t^3$.

~~b)~~ $y(t) = t^2$.

c) $y(t) = 1 - t^2$.

d) $y(t) = t^3$.

Esercizio 3

Trovare la soluzione generale dell'equazione differenziale

$$y'' + y - 2y = 0.$$

Risoluzione

L'equazione è lineare omogenea del II ordine. Il polinomio caratteristico associato è dato da

$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$, $(\lambda - 1)(\lambda + 2) = 0$, per cui

$\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 1$ sono le due radici con molteplicità 1.

L'integrale generale è quindi

$y(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{t}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Esercizio 4

Trovare la soluzione generale dell'equazione differenziale

$$y'''' + 16y = 0.$$

Risoluzione

L'equazione è lineare omogenea del IV ordine. Il polinomio caratteristico associato è dato da

$\lambda^4 + 16 = 0$. Cerco λ del tipo $\lambda = \rho e^{i\vartheta}$. Allora

$\rho^4 e^{i4\vartheta} = -16 = 2^4 e^{i\pi}$, ovvero

$\rho = 2$ e $4\vartheta_k = \pi + 2k\pi$, $\vartheta_k = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$, $k = 0, 1, 2, 3$.

Perciò $\lambda_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \,\mathrm{sen}\, \pi/4\right) = 1 + i$, $\bar{\lambda}_1 = 1 - i$,

$\lambda_2 = 2\left(\cos\frac{3}{4}\pi + i \,\mathrm{sen}\, \frac{3}{4}\pi\right) = -1 + i$, $\bar{\lambda}_2 = -1 - i$

L'integrale generale è quindi

$y(t) = (c_1 \cos t + c_2 \,\mathrm{sen}\, t) e^{-t} + (c_3 \cos t + c_4 \,\mathrm{sen}\, t) e^{t}$,

$c_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3, 4$.

Seconda verifica di Analisi Matematica 2
Ingegneria Gestionale — Prof. B. Rubino

Cognome e nome:____________________________________

Matricola:____________________ L'Aquila, 5 febbraio 2002

Esercizio 1

Trovare la soluzione generale $y = y(t)$ dell'equazione differenziale

$$y''' + 64y = t.$$

Risoluzione L'equazione è lineare non omogenea del 3° ordine. Il polinomio caratteristico associato è dato da $\lambda^3 + 64 = 0$, da cui, se $\lambda = \rho e^{i\vartheta}$, sostituendo si ha $\rho^3 e^{i3\vartheta} = -64 = 4^3 e^{i\pi}$, ovvero $\rho = 4$ e $3\vartheta_k = \pi + 2k\pi$, $\vartheta_k = \frac{\pi}{3} + \frac{2}{3}\pi k$, $k = -1, 0, 1$.

Perciò $\lambda_0 = 4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\right) = 4\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \left(2 + i\,2\sqrt{3}\right)$, $\bar{\lambda}_0 = \left(2 - i\,2\sqrt{3}\right)$, $\lambda_1 = -4$.

Poiché $\lambda = 0$ non è soluzione del polinomio caratteristico, cerco una soluzione particolare dell'equazione differenziale non omogenea della forma $\bar{y}(t) = kt$ e sostituendo nell'equazione $64kt = t$, cioè $k = \frac{1}{64}$.

L'integrale generale è quindi

$$y(t) = \frac{t}{64} + c_1 e^{-4t} + e^{2t}\left(c_2 \cos(2\sqrt{3}t) + c_3 \operatorname{sen}(2\sqrt{3}t)\right),$$

$$c_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Esercizio 2

Risolvere l'integrale definito

$$\int_0^1 x^3 e^{x^2}\, dx$$

Risoluzione

Integrando per parti una volta si ha

$$\int x^3 e^{x^2} dx = \frac{1}{2}\int x^2 \left(2x e^{x^2}\right) dx = \frac{1}{2}x^2 e^{x^2} - \int x e^{x^2} dx =$$

$$= \frac{1}{2}x^2 e^{x^2} - \frac{1}{2}e^{x^2} + k, \quad k \in \mathbb{R}.$$ Perciò

$$\int_0^1 x^3 e^{x^2} dx = \frac{1}{2}\left(x^2 - 1\right)e^{x^2}\Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{2}$$

Esercizio 3

Risolvere l'integrale indefinito

$$\int \frac{e^{2x}}{1+e^{4x}}dx$$

Risoluzione

L'integrale lo si calcola per sostituzione, sia $w = e^{2x}$. Allora

$$\int \frac{e^{2x}\,dx}{1+e^{4x}} = \int \frac{dw}{1+w^2} = \operatorname{arctg} w + k = \operatorname{arctg}(e^{2x}) + K,$$

$K \in \mathbb{R}$,

Esercizio 4

Trovare la soluzione $y = y(t)$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{1+e^{4y}}{2e^{2y}(1+t^2)} \\ \\ y(1) = 0. \end{cases}$$

Risoluzione Si tratta di un'equazione differenziale a variabili separabili. Separando le variabili abbiamo

$$\frac{e^{2y}\,y'}{1+e^{4y}} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{1+t^2}, \quad \text{da cui}$$

$$\int_1^t \frac{e^{2y(s)}}{1+e^{4y(s)}}\,y'(s)\,ds = \frac{1}{2}\int_1^t \frac{ds}{1+s^2}. \quad \text{Posto } w = y(s) \text{ si ha}$$

$$\int_0^{y(t)} \frac{e^{2w}\,dw}{1+e^{4w}} = \frac{1}{2}\left(\operatorname{arctg}(t) - \frac{\pi}{4}\right) \quad \text{utilizzando l'es. 3}$$

$$\operatorname{arctg}\left(e^{2w}\right)\Big|_0^{y(t)} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(t) - \frac{\pi}{8}$$

$$\operatorname{arctg} e^{2y(t)} - \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(t) - \frac{\pi}{8},$$

$$\operatorname{arctg} e^{2y(t)} = \frac{1}{2}\left(\operatorname{arctg}(t) + \frac{\pi}{4}\right) \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

per cui $e^{2y(t)} = \operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(t) + \frac{\pi}{8}\right) > 0$ quando $\operatorname{arctg} t > -\frac{\pi}{4}$.

$$y(t) = \frac{1}{2}\log\left[\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(t) + \frac{\pi}{8}\right)\right]$$ è la soluzione cercata $\forall t > -1$

Recupero seconda verifica di Analisi Matematica 2
Ingegneria Gestionale — Prof. B. Rubino

Cognome e nome:________________________________

Matricola:____________________ L'Aquila, 18 marzo 2002

Esercizio 1

Trovare la soluzione generale $y = y(t)$ dell'equazione differenziale

$$y''' - y = t.$$

Risoluzione

L'equazione è lineare non omogenea del 3° ordine. Il polinomio caratteristico associato è dato da $\lambda^3 - 1 = 0$. Se $\lambda = \rho e^{i\vartheta}$, sostituendo si ha $\rho^3 e^{3i\vartheta} = 1 = e^{i0}$, ovvero $\rho = 1$ e $3\vartheta_k = 2k\pi$, $\vartheta_k = \frac{2}{3}\pi k$, $k = -1, 0, 1$.

Perciò $\lambda_0 = 1$, $\lambda_2 = \cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{2}{3}\pi\right) = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\bar{\lambda}_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Poichè $\lambda = 0$ non è soluzione del polinomio caratteristico, cerco una soluzione particolare del tipo $\bar{y}(t) = kt$, da cui sostituendo $-kt = t$, cioè $k = -1$.

L'integrale generale è perciò

$$y(t) = -t + c_1 e^t + e^{-t/2}\left(c_2 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + c_3 \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right),$$

$c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.

Esercizio 2

Risolvere l'integrale definito

$$\int_0^1 x^3 \sin(x^2)\, dx$$

Risoluzione

Integrando una volta per parti si ha

$$\int x^3 \operatorname{sen}(x^2)\, dx = \frac{1}{2}\int x^2 (2x \operatorname{sen}(x^2))\, dx = -\frac{1}{2}x^2\cos(x^2) + \int x\cos(x^2)\, dx = -\frac{1}{2}x^2\cos(x^2) + \frac{1}{2}\operatorname{sen}(x^2) + K,$$

$K \in \mathbb{R}$. Perciò $\int_0^1 x^3 \operatorname{sen}(x^2)\, dx = -\frac{1}{2}\cos(1) + \frac{1}{2}\operatorname{sen}(1)$

Esercizio 3

Risolvere l'integrale indefinito

$$\int \frac{\sin x \cos x}{1 + sen^2 x}\, dx$$

Risoluzione

Poichè $D(1+sen^2 x) = 2\, sen\, x \cos x$, si ha

$$\frac{1}{2}\int \frac{2\, sen\, x \cos x \, dx}{1 + sen^2 x} = \frac{1}{2}\log\left(1 + sen^2 x\right) + K,$$

$K \in \mathbb{R}$.

Esercizio 4

Trovare la soluzione $y = y(t)$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{1 + \sin^2 y}{2 \sin y \cos y\,(1+t)} \\ \\ y(1/2) = \pi/4 \end{cases}$$

Risoluzione

Si tratta di un'equazione differenziale a variabili separabili. Separando le variabili abbiamo

$$\frac{2\, sen\, y \cos y}{1 + sen^2 y}\, y' = \frac{1}{1+t}, \quad \text{da cui}$$

$$\int_{1/2}^{t} \frac{2\, sen\, y(s) \cos y(s)}{1 + sen^2(y(s))}\, y'(s)\, ds = \int_{1/2}^{t} \frac{1}{1+s}\, ds$$

e usando l'es. 3 si ha

$$\log\left(1 + sen^2(y(s))\right)\Big|_{s=1/2}^{s=t} = \log(|1+s|)\Big|_{s=1/2}^{s=t}$$

$$\log\left(\frac{1 + sen^2(y(t))}{1 + 1/2}\right) = \log\frac{1+t}{3/2}, \quad sen^2(y(t)) = t,$$

$$sen(y(t)) = \sqrt{t}, \quad y(t) = arcsen(\sqrt{t}) \qquad 0 \le t \le 1$$

Terza verifica di Analisi Matematica 2
Ingegneria Gestionale — Prof. B. Rubino

Cognome e nome:______________________________

Matricola:____________________ L'Aquila, 12 febbraio 2002

Esercizio 1

Trovare la soluzione generale y_k dell'equazione alle differenze

$$y_{k+2} + 3y_{k+1} + 2y_k = 12$$

Risoluzione

Consideriamo il polinomio caratteristico associato:
$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$, $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2$.
Cerco poi una soluzione particolare costante, per cui sostituendo nell'equazione si ha
$c + 3c + 2c = 12$, da cui $c = 2$.
La soluzione generale è quindi

$$y_k = c_1(-1)^k + c_2(-2)^k + 2, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}, \; k \in \mathbb{N}.$$

Esercizio 2

Trovare la soluzione y_k del problema

$$\begin{cases} y_{k+1} = 3y_k + 2 \\ y_0 = 2. \end{cases}$$

Risoluzione

Consideriamo il polinomio caratteristico associato: $\lambda - 3 = 0$, $\lambda = 3$. Cerchiamo ora una soluzione particolare costante, per cui sostituendo nell'equazione si ha
$c = 3c + 2$, da cui $c = -1$. La soluzione generale è quindi

$$y_k = -1 + \alpha 3^k, \qquad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Imponendo la condizione iniziale, $y_0 = -1 + \alpha$, $\alpha - 1 = 2$, $\alpha = 3$, si ottiene

$$y_k = -1 + 3^{k+1}, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Esercizio 3

Trovare la soluzione generale $y = y(x)$ dell'equazione differenziale

$$y' = \frac{3}{x}y + x.$$

Risoluzione

Sappiamo che la soluzione generale di $y' = -a(x)\,y + f(x)$ è data da

$$y(x) = C\,e^{-A(x)} + e^{-A(x)} \int f(x)\, e^{A(x)}\, dx,$$

dove $A(x) = \int a(x)\, dx$. Perciò nel nostro caso

$A(x) = -\int \frac{3}{x}\, dx = -3 \log|x|$, per cui

$e^{-A(x)} = e^{\log|x|^3} = |x|^3$ e si ha

$y(x) = C|x|^3 + |x|^3 \int x \frac{1}{|x|^3}\, dx =$ per l'arbitrarietà della costante

$$= K x^3 + x^3 \int \frac{dx}{x^2} = K x^3 + x^3\left(-\frac{1}{x}\right) =$$

$$= K x^3 - x^2, \quad K \in \mathbb{R}.$$

Esercizio 4

Dire se i seguenti integrali impropri *convergono*:

$a)\ \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ $\cancel{\boxed{\text{SI}}}$ $\boxed{\text{NO}}$

$b)\ \displaystyle\int_0^{1} \frac{dx}{x+\sqrt{x}}$ $\boxed{\text{SI}}$ $\cancel{\boxed{\text{NO}}}$

$c)\ \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin(x^2)}{x^2}\, dx$ $\cancel{\boxed{\text{SI}}}$ $\boxed{\text{NO}}$

Recupero terza verifica di Analisi Matematica 2
Ingegneria Gestionale — Prof. B. Rubino

Cognome e nome:______________________

Matricola:______________ L'Aquila, 18 marzo 2002

Esercizio 1

Trovare la soluzione generale y_k dell'equazione alle differenze

$$y_{k+2} - 3y_{k+1} - 10y_k = 10$$

Risoluzione

Consideriamo il polinomio caratteristico associato:
$\lambda^2 - 3\lambda - 10 = 0$, $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = -2$.
Cerchiamo poi una soluzione particolare $y_k = c$ costante dell'equazione. Si ha
$c - 3c - 10c = 10$, $-12c = 10$, $c = -\frac{5}{6}$.
La soluzione generale è quindi

$$y_k = -\frac{5}{6} + c_1 5^k + c_2 2^k, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}, \quad k \in \mathbb{N}$$

Esercizio 2

Trovare la soluzione y_k del problema

$$\begin{cases} y_{k+1} = 5y_k - 2 \\ y_0 = 1. \end{cases}$$

Risoluzione

Consideriamo il polinomio caratteristico associato $\lambda - 5 = 0$, $\lambda = 5$. Cerchiamo poi una soluzione particolare $y_k = c$ costante dell'equazione. Si ha $c = 5c - 2$, $+4c = +2$ $c = \frac{1}{2}$. La soluzione generale è quindi

$y_k = \frac{1}{2} + \alpha 5^k$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Imponendo la condizione iniziale, $y_0 = \frac{1}{2} + \alpha$, $\frac{1}{2} + \alpha = 1$, $\alpha = \frac{1}{2}$ per cui la soluzione del problema è

$$y_k = \frac{1}{2}\left(1 + 5^k\right), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Esercizio 3

Trovare la soluzione generale $y = y(x)$ dell'equazione differenziale

$$y' = \frac{5}{x}y + 2x.$$

Risoluzione

Sappiamo che la soluzione generale di $y' = -a(x)y + f(x)$ è data da

$y(x) = c\, e^{-A(x)} + e^{-A(x)} \int f(x)\, e^{A(x)}\, dx$,

dove $A(x) = \int a(x)\, dx$. Perciò nel nostro caso

$A(x) = -\int \frac{5}{x}\, dx = -5 \log|x|$, per cui

$e^{-A(x)} = e^{\log|x|^5} = |x|^5$ e si ha

$y(x) = c\,|x|^5 + |x|^5 \int 2x \frac{1}{|x|^5}\, dx =$ per l'arbitrarietà della

costante $= K x^5 + x^5 \int \frac{2}{x^4}\, dx = K x^5 - x^5 \frac{2}{3x^3}$

$= K x^5 - \frac{2}{3} x^2$, $K \in \mathbb{R}$.

Esercizio 4

Dire se i seguenti integrali impropri *convergono*:

a) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^4}$ $\quad \cancel{\boxed{\text{SI}}} \quad \boxed{\text{NO}}$

b) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{dx}{x + x\sqrt{x}}$ $\quad \boxed{\text{SI}} \quad \cancel{\boxed{\text{NO}}}$

c) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin(x\sqrt{x})}{1+x^2}\, dx$ $\quad \cancel{\boxed{\text{SI}}} \quad \boxed{\text{NO}}$

Quarta verifica di Analisi Matematica 2
Ingegneria Gestionale — Prof. B. Rubino

Cognome e nome:______________________________

Matricola:________________ L'Aquila, 20 febbraio 2002

Esercizio 1

Calcolare l'integrale indefinito

$$\int \frac{dt}{t^2+5t-50}$$

Risoluzione

Si tratta di trovare la primitiva di una funzione razionale.

$t^2+5t-50=0 \qquad t = \frac{-5 \mp \sqrt{25+200}}{2} = \frac{-5 \pm 15}{2}$

$t_1=-10$, $t_2=5$. Dobbiamo allora trovare una decomposizione del tipo

$$\frac{1}{t^2+5t-50} = \frac{A}{t+10} + \frac{B}{t-5} = \frac{At-5A+Bt+10B}{(t+10)(t-5)}$$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ -5A+10B=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} B=-A \\ 5B+10B=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} A=-\frac{1}{15} \\ B=\frac{1}{15} \end{cases}$$

Si ha quindi

$$\int \frac{dt}{t^2+5t-50} = \frac{1}{15}\int \frac{1}{t-5}\,dt - \frac{1}{15}\int \frac{1}{t+10}\,dt =$$

$$= \frac{1}{15}\log|t-5| - \frac{1}{15}\log|t+10| + K = \frac{1}{15}\log\left|\frac{t-5}{t+10}\right| + K, \quad K \in \mathbb{R}$$

Esercizio 2

Utilizzando eventualmente la risoluzione dell'*Esercizio 1*, calcolare l'integrale definito

$$\int_6^9 \frac{dt}{t^2+5t-50}$$

Risoluzione

Si ha

$$\int_6^9 \frac{dt}{t^2+5t-50} = \frac{1}{15}\log\left|\frac{t-5}{t+10}\right| \Bigg|_{t=6}^{t=9} =$$

$$= \frac{1}{15}\left(\log\frac{4}{19} - \log\frac{1}{16}\right) = \frac{1}{15}\log\left(\frac{64}{19}\right)$$

Si osservi che l'esercizio aveva senso solo perchè i punti di discontinuità (asintoti verticali) $t_1 = -10$ e $t_2 = 5$ non appartenevano al dominio di integrazione $[6, 9]$.

Esercizio 3

Utilizzando opportunamente la trasformata di Laplace ed eventualmente la risoluzione dell'*Esercizio 1*, trovare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + 5y' - 50y = 0 \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 1. \end{cases}$$

Risoluzione

Si tratta di un'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti del 2° ordine. Sia $Y(p) = \mathcal{L}[y](p)$ la trasformata di Laplace di $y(t)$. Allora

$$\mathcal{L}[y'] = pY(p) - y(0), \quad \mathcal{L}[y''] = p^2 Y(p) - p\,y(0) - y'(0)$$

e sostituendo nell'equazione si ha

$$p^2 Y(p) - 1 + 5pY(p) - 50Y(p) = 0$$

$$Y(p)(p^2 + 5p - 50) = 1, \quad Y(p) = \frac{1}{p^2 + 5p - 50},$$

$$Y(p) = \frac{1}{15}\left(\frac{1}{p-5} - \frac{1}{p+10}\right)$$

da cui antitrasformando

$$y(t) = \frac{1}{15}\left(e^{5t} - e^{-10t}\right)$$

è la soluzione del problema proposto.

Recupero quarta verifica di Analisi Matematica 2
Ingegneria Gestionale — Prof. B. Rubino

Cognome e nome:______________________________

Matricola:____________________ L'Aquila, 18 marzo 2002

Esercizio 1

Calcolare l'integrale indefinito

$$\int \frac{dt}{t^2+12t+20}$$

Risoluzione

Si tratta di trovare la primitiva di una funzione razionale

$t^2+12t+20=0 \qquad t=\dfrac{-6\mp\sqrt{36-20}}{1}=-6\mp 4$

$t_1=-10$, $t_2=-2$. Dobbiamo allora trovare una decomposizione del tipo

$$\frac{1}{t^2+12t+20}=\frac{A}{t+10}+\frac{B}{t+2}=\frac{At+2A+Bt+10B}{(t+10)(t+2)}$$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ 2A+10B=1 \end{cases} \quad \begin{cases} B=-A \\ -8A=1 \end{cases} \quad \begin{cases} A=-\frac{1}{8} \\ B=\frac{1}{8} \end{cases}$$

Si ha quindi

$$\int \frac{dt}{t^2+12t+20}=-\frac{1}{8}\int\frac{dt}{t+10}+\frac{1}{8}\int\frac{dt}{t+2}=-\frac{1}{8}\log|t+10|+$$

$$+\frac{1}{8}\log|t+2|+k=\frac{1}{8}\log\left|\frac{t+2}{t+10}\right|+k, \quad k\in\mathbb{R}$$

Esercizio 2

Utilizzando eventualmente la risoluzione dell'*Esercizio 1*, calcolare l'integrale definito

$$\int_0^1 \frac{dt}{t^2+12t+20}$$

Risoluzione

I punti di discontinuità (asintoti verticali) $t_1=-10$ e $t_2=-2$ della funzione non appartengono al dominio di integrazione $[0,1]$.

Si ha

$$\int_0^1 \frac{dt}{t^2+12t+20} = \frac{1}{8} \log\left(\frac{t+2}{t+10}\right)\Bigg|_{t=0}^{t=1} =$$

$$= \frac{1}{8}\left(\log\left(\frac{3}{11}\right) - \log\left(\frac{1}{5}\right)\right) = \frac{1}{8} \log\left(\frac{15}{11}\right)$$

Esercizio 3

Utilizzando opportunamente la trasformata di Laplace ed eventualmente la risoluzione dell'*Esercizio 1*, trovare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + 12y' + 20y = 0 \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 1. \end{cases}$$

Risoluzione

Si tratta di un'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti omogenea del 2° ordine. Sia $Y(p) = \mathcal{L}[y](p)$ la trasformata di Laplace di $y(t)$. Allora

$$\mathcal{L}[y'] = p\,Y(p) - y(0), \quad \mathcal{L}[y''] = p^2 Y(p) - p\,y(0) - y'(0)$$

e sostituendo nell'equazione si ha

$$p^2 Y(p) - 1 + 12\,p\,Y(p) + 20\,Y(p) = 0$$

$$Y(p)\left(p^2 + 12p + 20\right) = 1, \quad Y(p) = \frac{1}{p^2+12p+20}$$

$$Y(p) = \frac{1}{8}\left(\frac{1}{t+2} - \frac{1}{t+10}\right)$$

da cui antitrasformando

$$y(t) = \frac{1}{8}\left(e^{-2t} - e^{-10t}\right)$$

è la soluzione del problema proposto.

Quinta verifica di Analisi Matematica 2
Ingegneria Gestionale — Prof. B. Rubino

Cognome e nome:____________________

Matricola:____________________ L'Aquila, 27 febbraio 2002

Esercizio 1

Trovare lo sviluppo di Taylor in $t_0 = 0$ fino all'ordine 3 per la funzione

$$f(t) = \log\left(1 + t\sin\left(t\cos t\right)\right)$$

Risoluzione

Ricordiamo che

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3) = 1 + o(x)$$

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4) = x + o(x^2)$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

Perciò

$$t\cos t = t + o(t^2)$$

$$\operatorname{sen}(t\cos t) = \operatorname{sen}(t + o(t^2)) = t + o(t^2) + o\left[(t + o(t^2))^2\right] = t + o(t^2)$$

$$t\operatorname{sen}(t\cos t) = t^2 + o(t^3)$$

$$\log(1 + t\operatorname{sen}(t\cos t)) = t^2 + o(t^3) - \frac{1}{2}(t^2 + o(t^3))^2 + o\left[(t^2 + o(t^3))^2\right] = t^2 + o(t^3) - \frac{1}{2}(t^4 + o(t^5)) + o(t^4) = t^2 + o(t^3).$$

Esercizio 2

Calcolare

a) $x^3 \, o(x^5) =$ $o(x^8)$

b) $o(x^3)\, o(x) =$ $o(x^4)$

c) $\dfrac{o(x^5)}{x} =$ $o(x^4)$

d) $\dfrac{o(x^3)}{o(x^2)} =$ NON SI PUÒ CALCOLARE

e) $x^3 + o(x^2) =$ $o(x^2)$

f) $o(x^2) + o(x^4) =$ $o(x^2)$

Esercizio 3

Utilizzando opportunamente lo sviluppo di Taylor, calcolare il seguente limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{x e^{x^2} - x\cos x}{\sin x - \arctan x}$$

Risoluzione

Si ha $e^t = 1 + t + o(t)$, $\cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^3)$

$\operatorname{sen} t = t - \frac{1}{6}t^3 + o(t^4)$, $\operatorname{arctg} t = t - \frac{1}{3}t^3 + o(t^4)$

Perciò

$$\lim_{x\to 0} \frac{x e^{x^2} - x\cos x}{\operatorname{sen} x - \operatorname{arctg} x} = \lim_{x\to 0} \frac{x\left(1 - x^2 + o(x^3)\right) - \left(x - \frac{x^3}{2} + o(x^4)\right)}{\cancel{x} - \frac{1}{6}x^3 + o(x^4) - \cancel{x} + \frac{1}{3}x^3 + o(x^4)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x - x^3 - x + \frac{1}{2}x^3 + o(x^4)}{\frac{1}{6}x^3 + o(x^4)} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{2}x^3 + o(x^4)}{\frac{1}{6}x^3 + o(x^4)}$$

$= -3$

Recupero quinta verifica di Analisi Matematica 2
Ingegneria Gestionale — Prof. B. Rubino

Cognome e nome: ______________________

Matricola: ______________ L'Aquila, 18 marzo 2002

Esercizio 1

Trovare lo sviluppo di Taylor in $t_0 = 0$ fino all'ordine 3 per la funzione

$$f(t) = \log\left(1 + te^t \sin(t)\right)$$

Risoluzione

Poichè

$\operatorname{sen} t = t + o(t^2)$, $e^t = 1 + o(1)$,

$t e^t \operatorname{sen}(t) = t\,(1+o(1))\left(t + o(t^2)\right) = t^2 + o(t^3)$

D'altra parte $\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$ e quindi

$\log(1 + t e^t \operatorname{sen} t) = t^2 + o(t^3) - \frac{1}{2}\left(t^2 + o(t^3)\right)^2 +$

$+ o\left[\left(t^2 + o(t^3)\right)^2\right] = t^2 + o(t^3)$

Esercizio 2

Calcolare

$a)\quad x^6\, o(x) =$ $o(x^7)$

$b)\quad o(x^2)\; o(x^2) =$ $o(x^4)$

$c)\quad \dfrac{o(x^2)}{x} =$ $o(x)$

$d)\quad \dfrac{o(x^5)}{o(x^4)} =$ NON SI PUÒ CALCOLARE

$e)\quad x^6 + o(x^4) =$ $o(x^4)$

$f)\quad o(x) + o(x^3) =$ $o(x)$

Esercizio 3

Utilizzando opportunamente lo sviluppo di Taylor, calcolare il seguente limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{xe^{x} - xe^{-x}}{\sin x^2 \cos x}$$

Risoluzione

Si ha $e^t = 1 + t + o(t)$, $\operatorname{sen} t = t + o(t)$, $\cos t = 1 + o(t)$, da cui

$$\lim_{x\to 0} \frac{x(1+x+o(x)) - x(1-x+o(x))}{(x^2+o(x^2))(1+o(x))} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x}+x^2-\cancel{x}+x^2+o(x^2)}{x^2+o(x^2)} = 2$$

Sesta verifica di Analisi Matematica 2
Ingegneria Gestionale — Prof. B. Rubino

Cognome e nome:______________________________

Matricola:____________________ L'Aquila, 6 marzo 2002

Esercizio 1

Calcolare il seguente limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y^2+y^6}{(x^2+y^2)^2}$$

Risoluzione

Passando in coordinate polari

$$\begin{cases} x = \rho \cos\vartheta & \rho \geq 0 \\ y = \rho \,\mathrm{sen}\,\vartheta & \vartheta \in [0, 2\pi) \end{cases}$$

la forma indeterminata $\frac{0}{0}$ di partenza si trasforma in

$$\lim_{\rho\to 0^+} \frac{\rho^5 \cos^3\vartheta \,\mathrm{sen}^2\vartheta + \rho^6 \,\mathrm{sen}^6\vartheta}{\rho^4} =$$

$$= \lim_{\rho\to 0^+} \rho \cos^3\vartheta \,\mathrm{sen}^2\vartheta + \rho^2 \,\mathrm{sen}^6\vartheta = 0$$

Esercizio 2

Determinare i punti critici della funzione di due variabili

$$f(x,y) = x^2 + y^2 + x^6 + y^4$$

e classificarli (dire cioè se si tratta di massimi, minimi, selle).

Risoluzione

La f è di classe $C^\infty(\mathbb{R}^2)$. Si ha

$f_x(x,y) = 2x + 6x^5 = 2x(1+3x^4)$

$f_y(x,y) = 2y + 4y^3 = 2y(1+2y^2)$

I punti critici sono dati dalle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} 2x(1+3x^4) = 0 \\ 2y(1+2y^2) = 0 \end{cases}$$

la cui unica soluzione è $O = (0,0)$

Calcoliamo ora la matrice Hessiana nell'origine.

$f_{xx}(x,y) = 2 + 30x^4$

$f_{xy}(x,y) = 0$

$f_{yy}(x,y) = 2 + 12y^2$

per cui

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Essendo i due autovalori positivi, l'origine è un punto di minimo relativo

Si osservi che $O = (0,0)$ è minimo assoluto visto che $f(0,0) = 0$ mentre $f(x,y) > 0 \quad \forall (x,y) \neq (0,0)$.

Recupero sesta verifica di Analisi Matematica 2
Ingegneria Gestionale — Prof. B. Rubino

Cognome e nome:____________________

Matricola:____________________ L'Aquila, 18 marzo 2002

Esercizio 1

Calcolare il seguente limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y^4+y^8}{(x^2+y^2)^3}$$

Risoluzione

Passando in coordinate polari

$$\begin{cases} x=\rho\cos\vartheta & \rho\geq 0 \\ y=\rho\,\mathrm{sen}\,\vartheta & \vartheta\in[0,2\pi) \end{cases}$$

la forma indeterminata $\frac{0}{0}$ di partenza si trasforma in

$$\lim_{\rho\to 0^+} \frac{\rho^7\cos^3\vartheta\,\mathrm{sen}^4\vartheta+\rho^8\,\mathrm{sen}^8\vartheta}{\rho^6}=$$

$$=\lim_{\rho\to 0^+} \rho\cos^3\vartheta\,\mathrm{sen}^4\vartheta+\rho^2\,\mathrm{sen}^8\vartheta=0$$

Esercizio 2

Determinare i punti critici della funzione di due variabili

$$f(x, y) = x^2 - y^2 + x^4 - y^4$$

e classificarli (dire cioè se si tratta di massimi, minimi, selle).

Risoluzione

La f è di classe $C^\infty(\mathbb{R}^2)$. Si ha

$$f_x(x,y) = 2x + 4x^3 = 2x(1+2x^2)$$

$$f_y(x,y) = -2y - 4y^3 = -2y(1+2y^2)$$

I punti critici sono dati dalle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} 2x(1+2x^2) = 0 \\ -2y(1+2y^2) = 0 \end{cases}$$

la cui unica soluzione è $O = (0,0)$.
Calcoliamo ora la matrice hessiana nell'origine

$$f_{xx}(x,y) = 2 + 12x^2$$

$$f_{xy}(x,y) = 0$$

$$f_{yy}(x,y) = -2 - 12y^2$$

per cui

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Essendo i due autovalori discordi, l'origine è un punto di sella.

VI verifica di Analisi Matematica 2
Ingegneria Gestionale — Prof. B. Rubino

Cognome e nome:____________________

Matricola:____________________ L'Aquila, 6 marzo 2002

Esercizio 1

Calcolare il seguente limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^3 + x^6}{(x^2+y^2)^2}$$

Risoluzione

Passando in coordinate polari

$$\begin{cases} x = \rho\cos\vartheta & \rho \geq 0 \\ y = \rho\,\mathrm{sen}\,\vartheta & \vartheta \in [0, 2\pi) \end{cases}$$

la forma indeterminata $\frac{0}{0}$ di partenza si trasforma in

$$\lim_{\rho\to 0^+} \frac{\rho^5\cos^2\vartheta\,\mathrm{sen}^3\vartheta + \rho^6\cos^6\vartheta}{\rho^4} =$$

$$= \lim_{\rho\to 0^+} \rho\cos^2\vartheta\,\mathrm{sen}^3\vartheta + \rho^2\cos^6\vartheta = 0$$

Esercizio 2

Determinare i punti critici della funzione di due variabili

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + x^4 + y^8$$

e classificarli (dire cioè se si tratta di massimi, minimi, selle).

Risoluzione

La f è di classe $C^\infty(\mathbb{R}^2)$. Si ha

$f_x(x,y) = 2x + 4x^3 = 2x(1+2x^2)$

$f_y(x,y) = 2y + 8y^7 = 2y(1+4y^6)$

I punti critici sono dati dalle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} 2x(1+2x^2) = 0 \\ 2y(1+4y^6) = 0 \end{cases}$$

la cui unica soluzione è $O = (0,0)$

Calcoliamo ora la matrice hessiana nell'origine

$f_{xx}(x,y) = 2 + 12x^2$

$f_{xy}(x,y) = 0$

$f_{yy}(x,y) = 2 + 56y^6$

per cui

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Essendo i due autovalori positivi, l'origine è un punto di minimo relativo.

Si osservi che $O = (0,0)$ è un minimo assoluto visto che $f(0,0) = 0$ mentre

$f(x,y) > 0 \quad \forall (x,y) \neq (0,0)$.

Settima verifica di Analisi Matematica 2
Ingegneria Gestionale — Prof. B. Rubino

Cognome e nome:________________________________

Matricola:______________________ L'Aquila, 14 marzo 2002

Esercizio 1

Calcolare il seguente integrale doppio

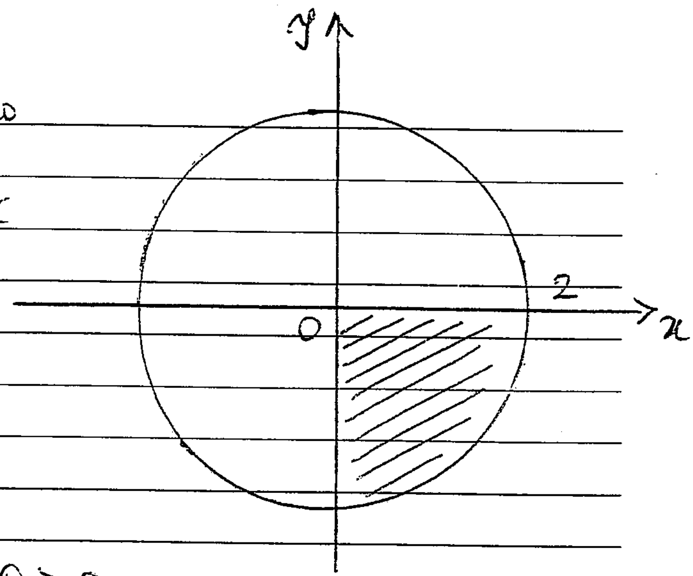
$$\iint_{\mathcal{D}} \frac{xy}{\sqrt{(x^2+y^2)}}\, dx\, dy$$

dove

$$\mathcal{D} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2+y^2 \leq 4,\ \ x \geq 0,\ \ y \leq 0 \right\}.$$

Risoluzione

Per prima cosa rappresentiamo il dominio D.



Passando a coordinate polari si ha

$$\begin{cases} x = \rho\cos\vartheta & 0 \leq \rho \leq 2 \\ y = \rho \operatorname{sen}\vartheta & -\frac{\pi}{2} \leq \vartheta \leq 0 \end{cases}$$

il cui jacobiano è $J = \rho \geq 0$

Risulta allora

$$\iint_{D} \frac{x\,y\,dx\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \int_0^2 \left(\int_{-\pi/2}^{0} \rho\, \frac{\rho^2 \cos\vartheta \operatorname{sen}\vartheta}{\rho}\, d\vartheta \right) d\rho$$

$$= \int_0^2 \rho^2\, d\rho \int_{-\pi/2}^{0} \cos\vartheta \operatorname{sen}\vartheta\, d\vartheta = \frac{1}{3} 2^3 \frac{1}{2} \operatorname{sen}^2\vartheta \Big|_{-\pi/2}^{0} =$$

$$= \frac{1}{6} \cdot 2^3 = \frac{4}{3}$$

Esercizio 2

Facendo uso della tecnica dei moltiplicatori di Lagrange, determinare la minima distanza del punto $P = (-1, 2)$ dalla circonferenza

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 25\}.$$

N.B.: Per semplificare i calcoli è opportuno minimizzare, anziché la distanza d sopra richiesta, il suo quadrato d^2 (calcolando alla fine la radice quadrata del risultato trovato).

Risoluzione

Preso un generico punto $X=(x,y)\in C$, la sua distanza da $P=(-1,2)$ è data da

$$d(X,P)=\sqrt{(x+1)^2+(y-2)^2}$$

Vogliamo perciò minimizzare la funzione

$F(x,y)=(x+1)^2+(y-2)^2$ con il vincolo $(x,y)\in C$.

Applichiamo la tecnica dei moltiplicatori.

Sia

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda)=(x+1)^2+(y-2)^2-\lambda(x^2+y^2-25)$$

e calcoliamo i suoi punti critici:

$$\begin{cases} \mathcal{L}_x = 2(x+1)-2\lambda x = 0 \\ \mathcal{L}_y = 2(y-2)-2\lambda y = 0 \\ \mathcal{L}_\lambda = -(x^2+y^2-25) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x(1-\lambda) = -1 \\ y(1-\lambda) = 2 \\ x^2+y^2 = 25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{\lambda-1} \\ y = \dfrac{-2}{\lambda-1} \\ \dfrac{1}{(\lambda-1)^2}+\dfrac{4}{(\lambda-1)^2} = 25 \end{cases} \qquad \frac{1}{(\lambda-1)^2}=5 \text{ da cui } \quad \lambda-1=\frac{\sqrt5}{5}$$

$$\begin{cases} x=\sqrt5 \\ y=-2\sqrt5 \end{cases} \text{ oppure } \begin{cases} x=-\sqrt5 \\ y=+2\sqrt5 \end{cases}$$

$F(\sqrt5,-2\sqrt5)=30+10\sqrt5$

$F(-\sqrt5,+2\sqrt5)=30-10\sqrt5 \implies d=\sqrt{30-10\sqrt5}$ è la distanza cercata

Recupero settima verifica di Analisi Matematica 2
Ingegneria Gestionale — Prof. B. Rubino

Cognome e nome:______________________________

Matricola:____________________ L'Aquila, 18 marzo 2002

Esercizio 1

Calcolare il seguente integrale doppio

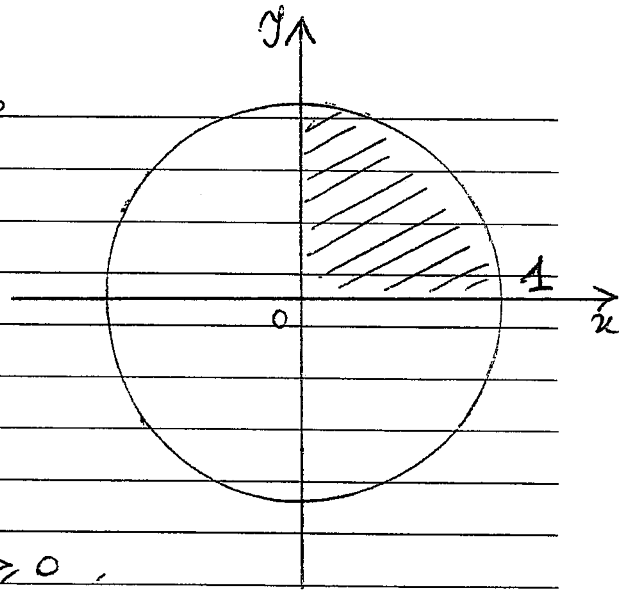
$$\iint_{\mathcal{D}} \frac{x^3 y}{(x^2+y^2)^2}\, dx\, dy$$

dove

$$\mathcal{D} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2+y^2 \le 1,\ \ x \ge 0,\ \ y \ge 0\right\}.$$

Risoluzione

Per prima cosa rappresentiamo il dominio D.



Passando a coordinate polari si ha

$$\begin{cases} x = \rho\cos\vartheta & 0 \le \rho \le 1 \\ y = \rho\,\text{sen}\,\vartheta & 0 \le \vartheta \le \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

il cui jacobiano è $J = \rho \ge 0$.

Risulta allora

$$\iint_D \frac{x^3 y}{(x^2+y^2)^2}\, dx\, dy = \int_0^1 \left(\int_0^{\pi/2} \rho \cdot \frac{\cancel{\rho^4}\cos^3\vartheta\,\text{sen}\,\vartheta}{\cancel{\rho^4}}\, d\vartheta \right) d\rho$$

$$= \int_0^1 \rho\, d\rho \int_0^{\pi/2} \text{sen}\,\vartheta \cos^3\vartheta\, d\vartheta =$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4}\cos^4\vartheta\right)\Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{8}$$

Esercizio 2

Facendo uso della tecnica dei moltiplicatori di Lagrange, determinare il minimo assoluto della funzione

$$F(x,y) = (x-2)^2 + (y+3)^2$$

sul vincolo

$$\mathcal{D} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 \geq 16\right\}.$$

Il massimo assoluto esiste? Perché?

Risoluzione

Per prima cosa determiniamo i punti critici di F:

$$\begin{cases} F_x = 2(x-2) = 0 \\ F_y = 2(y+3) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2 \\ y = -3 \end{cases}$$

Poiché $2^2 + (-3)^2 = 4 + 9 = 13 < 16$, tale punto non appartiene a $\mathcal{D}$.

Il massimo assoluto non esiste in quanto $\lim_{|(x,y)| \to \infty} F(x,y) = +\infty$, cioè F non è limitata superiormente.

Per dimostrare l'esistenza del minimo assoluto e calcolarlo, definiamo $D_R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 16 \leq x^2 + y^2 \leq R^2\}$, $R > 4$. Allora D_R è chiuso e limitato ed F è continua: per Weierstrass esiste il minimo assoluto su D_R.

Tale minimo non è interno poiché su D_R non vi sono punti critici.

Sia $\mathcal{L}(x,y,\lambda) = (x-2)^2 + (y+3)^2 - \lambda(x^2 + y^2 - r^2)$, $r = 4$ oppure $r = R$.

$$\begin{cases} \mathcal{L}_x = 2(x-2) - 2\lambda x = 0 \\ \mathcal{L}_y = 2(y+3) - 2\lambda y = 0 \\ \mathcal{L}_\lambda = -(x^2 + y^2 - r^2) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x(1-\lambda) = 2 \\ y(1-\lambda) = -3 \\ x^2 + y^2 = r^2 \end{cases} \quad \begin{cases} x = \dfrac{2}{1-\lambda} \\ y = \dfrac{3}{\lambda - 1} \\ \dfrac{4}{(\lambda-1)^2} + \dfrac{9}{(\lambda-1)^2} = r^2 \end{cases}$$

$$\frac{13}{(\lambda-1)^2} = r^2, \quad \frac{1}{\lambda - 1} = \pm \frac{r}{\sqrt{13}}$$

e le due soluzioni sono $A = \left(-\dfrac{2r}{\sqrt{13}}, \dfrac{3r}{\sqrt{13}}\right)$, $B = \left(\dfrac{2r}{\sqrt{13}}, -\dfrac{3r}{\sqrt{13}}\right)$

$$F(A) = \left(-\frac{2r}{\sqrt{13}} - 2\right)^2 + \left(\frac{3r}{\sqrt{13}} + 3\right)^2 = \left(r + \sqrt{13}\right)^2,$$

$$F(B) = \left(\frac{2r}{\sqrt{13}} - 2\right)^2 + \left(-\frac{3r}{\sqrt{13}} + 3\right)^2 = \left(r - \sqrt{13}\right)^2$$

Inoltre $(R - \sqrt{13})^2 > (4 - \sqrt{13})^2 \quad \forall R > 4$.

Perciò sulla corona D_R il minimo assoluto è sempre su $x^2 + y^2 = 16$ e vale $(4 - \sqrt{13})^2$ mentre il massimo assoluto sta su $x^2 + y^2 = R^2$ e tende a $+\infty$ (estremo superiore) quando $R \to +\infty$ (cioè quando $D_R \longrightarrow D$).

In conclusione su D il minimo assoluto esiste e vale $(4 - \sqrt{13})^2$ mentre il massimo assoluto non esiste.

VII verifica di Analisi Matematica 2
Ingegneria Gestionale — Prof. B. Rubino

Cognome e nome:______________________

Matricola:______________ L'Aquila. 14 marzo 2002

Esercizio 1

Calcolare il seguente integrale doppio

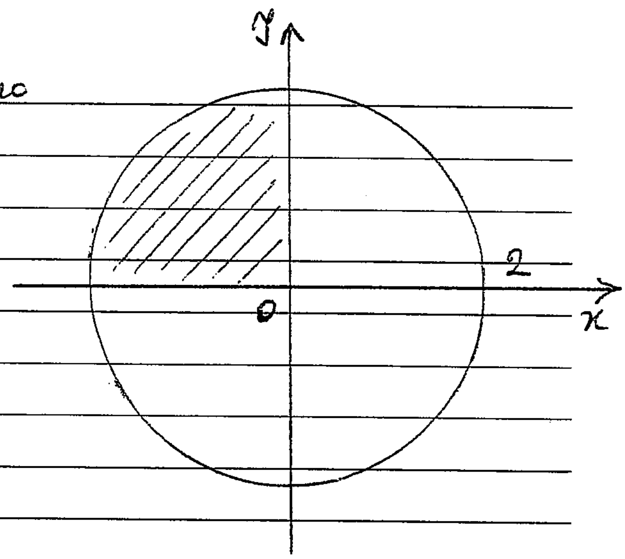
$$\iint_{\mathcal{D}} \frac{xy}{\sqrt{(x^2+y^2)}}\, dx\, dy$$

dove

$$\mathcal{D} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 + y^2 \leq 4,\ \ x \leq 0,\ \ y \geq 0 \right\}.$$

Risoluzione

Per prima cosa rappresentiamo il dominio D.



Passando a coordinate polari si ha

$$\begin{cases} x = \rho \cos\vartheta & 0 \leq \rho \leq 2 \\ y = \rho \operatorname{sen}\vartheta & \frac{\pi}{2} \leq \vartheta \leq \pi \end{cases}$$

Risulta allora

$$\iint_D \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dx\, dy = \int_0^2 \left(\int_{\pi/2}^{\pi} \cancel{\rho}\, \frac{\rho^2 \cos\vartheta \operatorname{sen}\vartheta}{\cancel{\rho}}\, d\vartheta \right) d\rho$$

$$= \int_0^2 \rho^2\, d\rho \int_{\pi/2}^{\pi} \cos\vartheta \operatorname{sen}\vartheta\, d\vartheta = \frac{1}{3}\, 2^3\, \frac{1}{2} \operatorname{sen}^2\vartheta \Big|_{\pi/2}^{\pi} =$$

$$= \frac{4}{3}(0-1) = -\frac{4}{3}$$

Esercizio 2

Facendo uso della tecnica dei moltiplicatori di Lagrange, determinare la minima distanza del punto $P = (1, -2)$ dalla circonferenza

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 25\}.$$

N.B.: Per semplificare i calcoli è opportuno minimizzare, anziché la distanza d sopra richiesta, il suo quadrato d^2 (calcolando alla fine la radice quadrata del risultato trovato).

Risoluzione

Preso un generico punto $X = (x, y) \in C$, la sua distanza da $P = (1, -2)$ è data da

$$d(X, P) = \sqrt{(x-1)^2 + (y+2)^2}.$$

Vogliamo perciò minimizzare la funzione

$F(x, y) = (x-1)^2 + (y+2)^2$ con il vincolo $(x, y) \in C$.

Applichiamo la tecnica dei moltiplicatori di Lagrange. Sia

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = (x-1)^2 + (y+2)^2 - \lambda(x^2 + y^2 - 25)$$

e calcoliamo i suoi punti critici:

$$\begin{cases} \mathcal{L}_x = 2(x-1) - 2\lambda x = 0 \\ \mathcal{L}_y = 2(y+2) - 2\lambda y = 0 \\ \mathcal{L}_\lambda = -(x^2 + y^2 - 25) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x(1-\lambda) = 1 \\ y(1-\lambda) = -2 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{1-\lambda} \\ y = \dfrac{2}{\lambda - 1} \\ \dfrac{1}{(\lambda-1)^2} + \dfrac{4}{(\lambda-1)^2} = 25 \end{cases} \qquad \frac{1}{(\lambda-1)^2} = 5, \text{ da cui}$$

$$\begin{cases} x = -\sqrt{5} \\ y = 2\sqrt{5} \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} x = \sqrt{5} \\ y = -2\sqrt{5} \end{cases}$$

$$F(-\sqrt{5}, 2\sqrt{5}) = 30 + 10\sqrt{5}, \quad F(\sqrt{5}, -2\sqrt{5}) = 30 - 10\sqrt{5}$$

Perciò la minima distanza cercata è

$$d = \sqrt{30 - 10\sqrt{5}}$$

Recupero VII verifica di Analisi Matematica 2
Ingegneria Gestionale — Prof. B. Rubino

Cognome e nome:______________________________

Matricola:____________________ L'Aquila, 18 marzo 2002

Esercizio 1

Calcolare il seguente integrale doppio

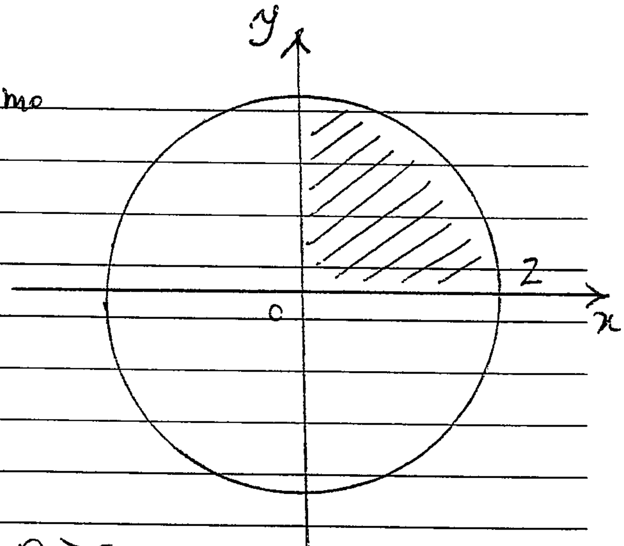
$$\iint_{\mathcal{D}} \frac{xy^3}{(x^2+y^2)^2}\, dx\, dy$$

dove

$$\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2+y^2 \leq 4, \ \ x \geq 0, \ \ y \geq 0\}.$$

Risoluzione

Per prima cosa rappresentiamo il dominio D.



Passando a coordinate polari si ha

$$\begin{cases} x = \rho\cos\vartheta & 0 \leq \rho \leq 2 \\ y = \rho\,\mathrm{sen}\,\vartheta & 0 \leq \vartheta \leq \pi/2 \end{cases}$$

il cui jacobiano è $J = \rho \geq 0$.

Risulta allora

$$\iint_D \frac{xy^3}{(x^2+y^2)^2}\, dx\, dy = \int_0^2 \rho \int_0^{\pi/2} \frac{\cancel{\rho^4}\cos\vartheta\,\mathrm{sen}^3\vartheta}{\cancel{\rho^4}}\, d\vartheta\, d\rho$$

$$= \int_0^2 \rho\, d\rho \int_0^{\pi/2} \cos\vartheta\,\mathrm{sen}^3\vartheta\, d\vartheta =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\,\mathrm{sen}^4\vartheta\right)\Bigg|_{\vartheta=0}^{\vartheta=\pi/2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{8}$$

Esercizio 2

Facendo uso della tecnica dei moltiplicatori di Lagrange, determinare il minimo assoluto della funzione

$$F(x, y) = (x-3)^2 + (y+2)^2$$

sul vincolo

$$\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 \geq 25\}.$$

Il massimo assoluto esiste? Perché?

Risoluzione

Per prima cosa determiniamo i punti critici di F:

$$\begin{cases} F_x = 2(x-3) = 0 \\ F_y = 2(y+2) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 3 \\ y = -2 \end{cases}$$

Poichè $3^2 + (-2)^2 = 9 + 4 = 13 < 25$, tale punto non appartiene a D.

Il massimo assoluto non esiste in quanto $\lim_{|(x,y)| \to \infty} F(x,y) = +\infty$, cioè F non è limitata superiormente.

Per dimostrare l'esistenza del minimo assoluto e calcolarlo, definiamo $D_R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 25 \leq x^2 + y^2 \leq R^2\}$, $R > 5$. Allora D_R è chiuso e limitato ed F è continua: per Weierstrass esiste il minimo assoluto su D_R.

Tale minimo non è interno poichè su D_R non vi sono punti critici.

Sia $\mathcal{L}(x, y, \lambda) = (x-3)^2 + (y+2)^2 - \lambda(x^2 + y^2 - r^2)$, $r = 5$ oppure $r = R$.

$$\begin{cases} \mathcal{L}_x = 2(x-3) - 2\lambda x = 0 \\ \mathcal{L}_y = 2(y+2) - 2\lambda y = 0 \\ \mathcal{L}_\lambda = -(x^2+y^2-r^2) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x(1-\lambda) = 3 \\ y(1-\lambda) = -2 \\ x^2+y^2 = r^2 \end{cases} \quad \begin{cases} x = \dfrac{3}{1-\lambda} \\ y = \dfrac{2}{\lambda-1} \\ \dfrac{9}{(\lambda-1)^2} + \dfrac{4}{(\lambda-1)^2} = r^2 \end{cases}$$

$$\frac{13}{(\lambda-1)^2} = r^2, \quad \frac{1}{\lambda-1} = \pm \frac{r}{\sqrt{13}}$$

e le due soluzioni sono $A = \left(-\dfrac{3r}{\sqrt{13}}, \dfrac{2r}{\sqrt{13}}\right)$, $B = \left(\dfrac{3r}{\sqrt{13}}, -\dfrac{2r}{\sqrt{13}}\right)$

$$F(A) = \left(-\frac{3r}{\sqrt{13}} - 3\right)^2 + \left(\frac{2r}{\sqrt{13}} + 2\right)^2 = \left(r + \sqrt{13}\right)^2,$$

$$F(B) = \left(\frac{3r}{\sqrt{13}} - 3\right)^2 + \left(-\frac{2r}{\sqrt{13}} + 2\right)^2 = \left(r - \sqrt{13}\right)^2$$

Inoltre $(R - \sqrt{13})^2 > (5 - \sqrt{13})^2 \quad \forall R > 5$.

Perciò nella corona D_R il minimo assoluto è sempre su $x^2 + y^2 = 25$ e vale $(5 - \sqrt{13})^2$ mentre il massimo assoluto sta su $x^2 + y^2 = R^2$ e tende a $+\infty$ (estremo superiore) quando $R \to +\infty$ (cioè quando $D_R \to D$).

In conclusione su D il minimo assoluto esiste e vale $(5 - \sqrt{13})^2$ mentre il massimo assoluto non esiste.

Analisi Matematica 2 (prima parte) — Prof. B. Rubino
Ingegneria Edile–Architettura A.A. 2001/02

Cognome e nome:________________________________

Matricola:________________________ *Facsimile* Tempo: 90 minuti

Esercizio 1

a) Trovare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y''' + 2y'' + 5y' + 10y = 0.$$

b) Trovare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y''' + 2y'' + 5y' + 10y = t.$$

c) Trovare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y''' + 2y'' + 5y' + 10y = e^{2t}.$$

d) Trovare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y''' + 2y'' + 5y' + 10y = t + e^{2t}.$$

Esercizio 2

Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \arctan\left(\frac{n}{n^3+1}\right)$$

Esercizio 3

Calcolare, se ciò ha senso, il massimo e il minimo assoluto della funzione

$$f(x, y) = 3x - 5y - 5$$

sul dominio

$$\mathcal{D} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; x^2 + y^2 \le 1, \; 0 \le y \le 1\right\}.$$

Esercizio 4

Calcolare l'integrale doppio

$$\iint_{\mathcal{D}} \left(x^2 + y^2\right) dx \; dy,$$

dove

$$\mathcal{D} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; x^2 + y^2 \le 1, \; 0 \le x \le 1\right\}.$$

ANALISI MATEMATICA 2 (prima parte) — PROF. RUBINO
INGEGNERIA EDILE-ARCHITETTURA   A.A. 2001-02

COMPITO FACSIMILE (MODELLO)

ESERCIZIO 1

a) Il polinomio caratteristico associato è dato da

$$\lambda^3 + 2\lambda^2 + 5\lambda + 10 = 0$$

$$\lambda^2(\lambda+2) + 5(\lambda+2) = 0$$

$$(\lambda^2+5)(\lambda+2) = 0$$

le cui radici sono:

$$\lambda_1 = -2, \quad \lambda_2 = -i\sqrt{5}, \quad \lambda_3 = +i\sqrt{5}.$$

L'integrale generale dell'equazione differenziale è perciò

$$y(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 \operatorname{sen}(\sqrt{5}\,t) + c_3 \cos(\sqrt{5}\,t), \qquad c_i \in \mathbb{R},\ i=1,2,3.$$

b) Poichè $\lambda = 0$ non è radice del polinomio caratteristico, utilizzando il metodo delle funzioni simili cerco una soluzione della forma

$\bar{y}(t) = \alpha t + \beta$, da cui $\bar{y}'(t) = \alpha$, $\bar{y}''(t) = \bar{y}'''(t) = 0$

e sostituendo: $5\alpha + 10\alpha t + 10\beta = t$

da cui

$$\begin{cases} 5\alpha + 10\beta = 0 \\ 10\alpha = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha = \frac{1}{10} \\ \beta = -\frac{1}{20} \end{cases}$$

La soluzione generale è perciò data da

$$y(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 \operatorname{sen}(\sqrt{5}\, t) + c_3 \cos(\sqrt{5}\, t) + \frac{t}{10} - \frac{1}{20},$$

$c_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3$.

c) Poichè $\lambda = 2$ non è radice del polinomio caratteristico, utilizzando il metodo delle funzioni simili cerco una soluzione della forma

$\bar{y}(t) = K e^{2t}$ e sostituendo nell'equazione

$$8K e^{2t} + 8K e^{2t} + 10K e^{2t} + 10K e^{2t} = e^{2t}$$

$$36K = 1, \quad K = \frac{1}{36}$$

La soluzione generale è perciò data da

$$y(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 \operatorname{sen}(\sqrt{5}\, t) + c_3 \cos(\sqrt{5}\, t) + \frac{e^{2t}}{36},$$

$c_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3$.

d) Utilizzando quanto trovato nei punti precedenti e sfruttando il principio di sovrapposizione si ha:

$$y(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 \operatorname{sen}(\sqrt{5}\, t) + c_3 \cos(\sqrt{5}\, t) + \frac{e^{2t}}{36} + t/10 - \frac{1}{20},$$

$c_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3$.

ESERCIZIO 2. Poichè

$$0 \leq \frac{n}{n^3+1} < 1$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$, i valori della successione

$a_n = \operatorname{arctg}\left(\frac{n}{n^3+1}\right)$ sono compresi nell'intervallo

$\left[0, \frac{\pi}{4}\right)$. In particolare, fatta eccezione per il primo termine nullo, la serie è a termini strettamente positivi. In particolare è perciò possibile fare uso del criterio del confronto asintotico.

Si ha

$$\lim_{n \to \infty} \operatorname{arctg}\left(\frac{n}{n^3+1}\right) = 0,$$ per cui è verificata la condizione necessaria.

Inoltre

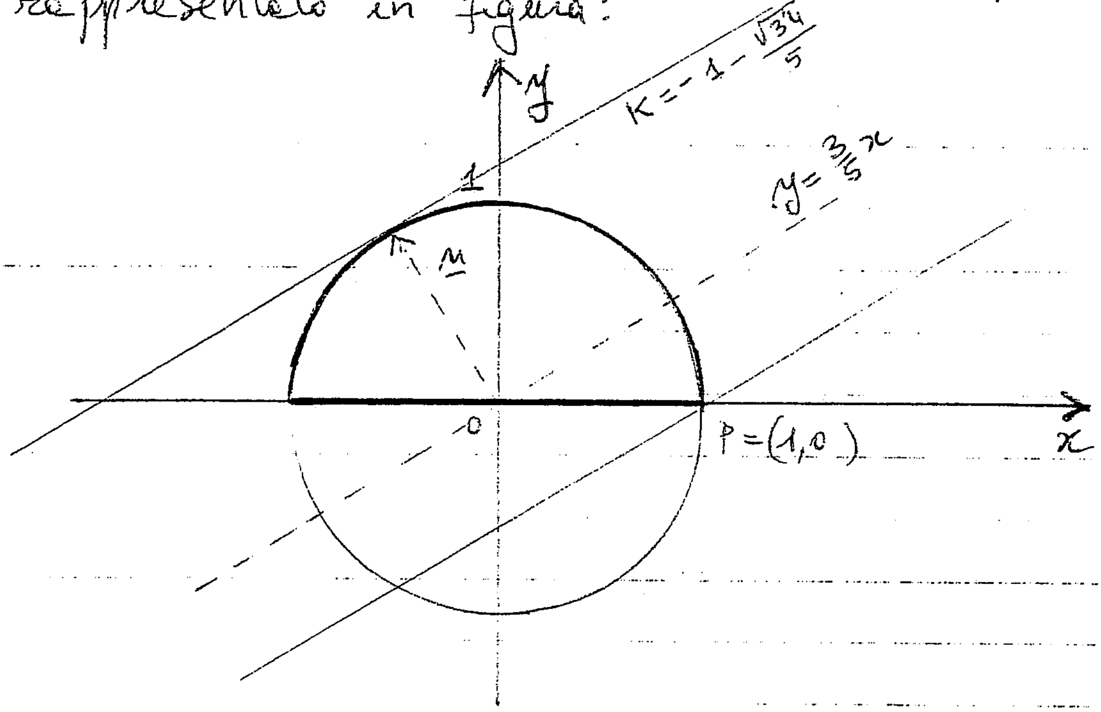
$$\lim_{n \to \infty} \frac{\operatorname{arctg} \frac{n}{n^3+1}}{\frac{n}{n^3+1}} = 1,$$ per cui

$$\sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{arctg}\left(\frac{n}{n^3+1}\right) \simeq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n^3+1} \simeq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

dato che $\lim_{n \to \infty} \frac{\frac{n}{n^3+1}}{\frac{1}{n^2}} = 1$.

Poichè $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge, anche la serie di partenza è convergente.

ESERCIZIO 3. Il dominio $\mathcal{D}$ è quello rappresentato in figura:



Si tratta del semicerchio superiore. Si noti che la limitazione $y\leq 1$ è superflua. Il dominio è chiuso e limitato per cui in base al teorema di Weierstrass il minimo e il max ass. esistono. Lo svolgimento dell'esercizio sarà fatto attraverso diverse tecniche:

a) CURVE DI LIVELLO.

Consideriamo le curve

$$3x-5y-5=5K, \quad K\in\mathbb{R}.$$

Si tratta di rette parallele,

$$y=\frac{1}{5}(3x-5-5K)=\frac{3}{5}x-1-K$$

tutte parallele a $y=\frac{3}{5}x$.

Per trovare quando tale retta diviene tangente alla circonferenza $x^2+y^2=1$ risolviamo il sistema

$$x^2+y^2=1$$
$$y=\frac{3}{5}x-1-k$$

imponendo che le due soluzioni siano coincidenti

$$\frac{9}{25}x^2-\frac{6}{5}(1+k)x+(1+k)^2+x^2=1$$

$$\frac{34}{25}x^2-\frac{6}{5}(1+k)x+k^2+2k=0$$

$$\Delta=\frac{36}{25}(1+k)^2-4\,\frac{34}{25}(k^2+2k)$$

$$=\frac{4}{25}\left[9+18k+9k^2-34k^2-68k\right]$$

$$=\frac{4}{25}\left(-25k^2-50k+9\right)$$

$$\Delta=0 \iff 25k^2+50k-9=0$$

$$k=\frac{-25\mp\sqrt{625+225}}{25}=\frac{-25\mp\sqrt{850}}{25}=\frac{-5\mp\sqrt{34}}{5}$$

Il punto di tangenza, situato nel secondo quadrante, corrisponde a

$$k=\frac{-5-\sqrt{34}}{5}=-1-\frac{\sqrt{34}}{5}$$

Tale valore è il minimo assoluto una volta moltiplicato per 5, cioè il minimo assoluto è $-5-\sqrt{34}$

Come si osserva graficamente il massimo assoluto lo si ottiene nel punto $P=(1,0)$ e si ha

$$5k=3-5=-2.$$

In conclusione il MIN. ASS. è $-5-\sqrt{34}$, il MAX ASS. è -2.

b) TEOREMA DI LAGRANGE.

Calcoliamo ∇f. si ha

$\nabla f(x,y) = (3, -5)$, costante. Non vi sono punti stazionari interni.

In base al teorema di Lagrange i punti di max e min. assoluto sono da ricercare sul bordo confrontando il valore raggiunto nei punti singolari con quello degli eventuali punti in cui il vettore ∇f è perpendicolare al bordo stesso. Nel nostro caso vi è un punto della semicirconferenza che verifica tale condizione. Si tratta di risolvere il sistema:

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ 3y=-5x \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2+\frac{25}{9}x^2=1 \\ y=-\frac{5}{3}x \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{34}{9}x^2=1 \\ y=-\frac{5}{3}x \end{cases} \qquad \begin{cases} x=\pm\frac{3}{\sqrt{34}} \\ y=-\frac{5}{3}x \end{cases}$$

Trattandosi di un punto del secondo quadrante è $x=-\frac{3}{\sqrt{34}}$

$$x_0=-\frac{3}{\sqrt{34}}$$

$$y_0=+\frac{5}{3}\frac{3}{\sqrt{34}}=\frac{5}{\sqrt{34}}$$

$$f(x_0,y_0)=-\frac{9}{\sqrt{34}}-\frac{25}{\sqrt{34}}-5 = -\sqrt{34}-5$$

Tale valore va confrontato con

$f(-1,0) = -3-5=-8$ e $f(1,0)=3-5=-2$

Perciò il MIN ASSOLUTO è $-\sqrt{34}-5$, il MAX ASSOLUTO -2.

Si osservi che il risultato è lo stesso trovato attraverso l'altra tecnica.

-) PARAMETRIZZAZIONE del bordo.

Poichè $\nabla f = (+3, -5)$ è costante, non vi sono punti stazionari interni. Max e minimi vanno perciò ricercati sul bordo.
Si ha la seguente decomposizione (e parametrizzazione) della frontiera:

$$\gamma_1: \begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases} \quad -1 \leq t \leq 1$$

$$\gamma_2: \begin{cases} x = \cos\vartheta \\ y = \operatorname{sen}\vartheta \end{cases} \quad 0 < \vartheta < \pi.$$

$$f_{|\gamma_1} = 3t - 5 = \varphi(t)$$

Poichè $\varphi'(t) = 3 \neq 0$, non vi sono punti stazionari interni. Si ha

$\varphi(-1) = -3 - 5 = -8$, $\varphi(1) = 3 - 5 = -2$ che sono rispettivamente min e max su γ_1.

$$f_{|\gamma_2} = 3\cos\vartheta - 5\,\mathrm{sen}\,\vartheta - 5 = \psi(\vartheta)$$

$$\psi'(\vartheta) = -3\,\mathrm{sen}\,\vartheta - 5\cos\vartheta$$

$$\psi'(\vartheta) = 0 \iff 3\,\mathrm{sen}\,\vartheta_0 + 5\cos\vartheta_0 = 0$$

$$\boxed{\mathrm{tg}\,\vartheta_0 = -\frac{5}{3}}$$ ϑ nel II quadrante poiché $\vartheta \in (0, \pi)$

$$\begin{cases} 3\,\mathrm{sen}\,\vartheta_0 + 5\cos\vartheta_0 = 0 \\ \mathrm{sen}^2\vartheta_0 + \cos^2\vartheta_0 = 1 \end{cases}$$

$$\mathrm{sen}\,\vartheta_0 = -\frac{5}{3}\cos\vartheta_0$$

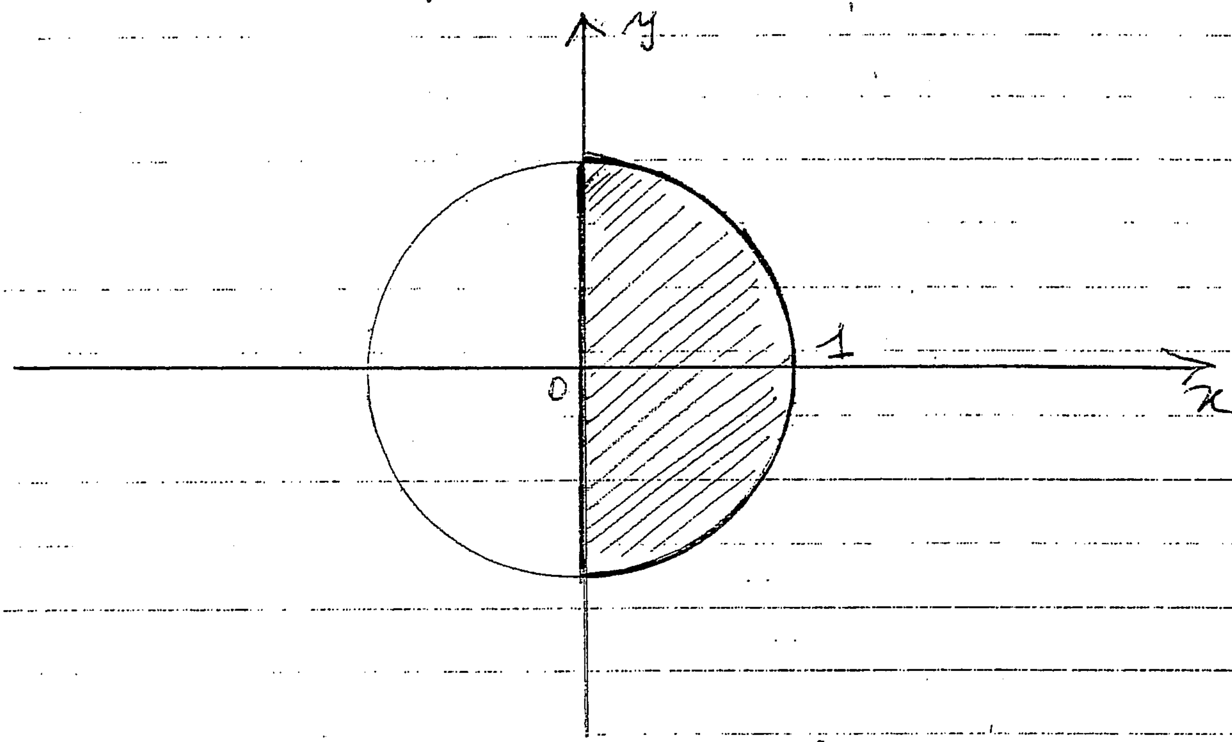
$$\left(\frac{25}{9} + 1\right)\cos^2\vartheta_0 = 1$$

$$\begin{cases} \cos\vartheta_0 = -\dfrac{3}{\sqrt{34}} \\ \mathrm{sen}\,\vartheta_0 = +\dfrac{5}{\sqrt{34}} \end{cases}$$

$$\psi(\vartheta_0) = -\frac{9}{\sqrt{34}} - \frac{25}{\sqrt{34}} - 5 = -\sqrt{34} - 5$$

Confrontando i valori trovati si ottiene ancora il risultato raggiunto attraverso le altre tecniche.

ESERCIZIO 4. Rappresentiamo il dominio.



La limitazione $x \leq 1$ è superflua. Il dominio corrisponde al semicerchio del 1° e 4° quadrante.
Passandolo in coordinate polari si ha:

$$\begin{cases} x = \rho \cos\vartheta \\ y = \rho \operatorname{sen}\vartheta \end{cases} \qquad \begin{array}{l} -\frac{\pi}{2} \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 \leq \rho \leq 1 \end{array}$$

Lo jacobiano del cambio di variabili è ρ.

Si ha quindi

$$\iint_D (x^2+y^2)\, dx\, dy = \int_0^1 \left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \rho \cdot \rho^2 \, d\vartheta \, d\rho \right) =$$

$$= \pi \int_0^1 \rho^3 \, d\rho = \frac{\pi}{4}.$$

Analisi Matematica 2 (seconda parte) — Prof. B. Rubino
Ingegneria Edile–Architettura A.A. 2001/02

Cognome e nome:________________________________

Matricola:________________________ *Facsimile* Tempo: 90 minuti

Esercizio A

Studiare il problema ai limiti

$$\begin{cases} y'' + 2y = e^{3t} \\ y(0) = 0 \\ y(\pi) = 0. \end{cases}$$

Esercizio B

Studiare la convergenza puntuale e uniforme per la serie di potenze ($x \in \mathbb{R}$)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2 + 2n}$$

Se ne calcoli, se ciò ha senso, la somma.

Esercizio C

Verificare il teorema di Gauss (o della divergenza) per il campo vettoriale

$$F(x, y, z) = (-x, y, -z)$$

e la regione

$$\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\right\}.$$

ANALISI MATEMATICA 2 (seconda parte) - PROF. B. RUBINO
ING. Edile - ARCHITETTURA , A.A. 2001/02

COMPITO MODELLO (FACSIMILE)

ESERCIZIO A

Il polinomio caratteristico associato all'equ. differenziale lineare del 2° ordine a coefficienti costanti del problema è

$$\lambda^2 + 2 = 0$$

le cui soluzioni sono

$$\lambda = \mp i\sqrt{2}$$

L'integrale generale dell'equ. omogenea associata $y'' + 2y = 0$ è

$$y(t) = c_1 \operatorname{sen}(\sqrt{2}\,t) + c_2 \cos(\sqrt{2}\,t), \qquad c_i \in \mathbb{R}, \ i = 1,2.$$

Mediante il metodo delle funzioni simili cerco una soluzione particolare della forma

$$\bar{y}(t) = K e^{3t}, \quad \text{da cui} \quad \bar{y}''(t) = 9K e^{3t}$$

e sostituendo nell'equazione si ha

$$9K e^{3t} + 2K e^{3t} = e^{3t}$$

$$11K = 1, \quad K = \frac{1}{11}$$

L'integrale generale dell'equazione $y''+2y=e^{3t}$ è quindi

$$y(t)=c_1 \operatorname{sen}(\sqrt{2}\,t)+c_2\cos(\sqrt{2}\,t)+\frac{1}{11}e^{3t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Imponiamo ora le condizioni agli estremi:

$$\begin{cases} c_2+\frac{1}{11}=0 \\ c_1 \operatorname{sen}(\sqrt{2}\,\pi)+c_2\cos(\sqrt{2}\,\pi)+\frac{1}{11}e^{3\pi}=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_2=-\frac{1}{11} \\ c_1=\dfrac{\frac{1}{11}\cos(\sqrt{2}\,\pi)-\frac{1}{11}e^{3\pi}}{\operatorname{sen}(\sqrt{2}\,\pi)} \end{cases}$$

L'unica soluzione del problema ai limiti proposto è perciò

$$y(t)=\frac{\cos(\sqrt{2}\,\pi)-e^{3\pi}}{11\operatorname{sen}(\sqrt{2}\,\pi)}\operatorname{sen}(\sqrt{2}\,t)-\frac{\cos(\sqrt{2}\,t)}{11}+\frac{e^{3t}}{11}$$

ESERCIZIO B

Calcoliamo per prima cosa il raggio di convergenza della serie

$$r = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2+2n}}{\frac{1}{(n+1)^2+2(n+1)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2n+1+2n+2}{n^2+2n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+4n+3}{n^2+2n} = 1$$

Verifichiamo in particolare la convergenza agli estremi dell'intervallo di convergenza $(-1,1)$. Si ha:

a) In $x=1$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+2n} \simeq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

che converge.

b) In $x=-1$ c'è convergenza assoluta in base a quanto trovato nel punto (a).

Abbiamo perciò convergenza puntuale in $[-1,+1]$.

Verifichiamo la convergenza totale in tale intervallo:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{[-1,1]} \left| \frac{x^n}{n^2+2n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+2n} \simeq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

Vi è perciò convergenza totale in $[-1,1]$. Di conseguenza vi è anche convergenza puntuale e uniforme in tale intervallo. Non vi è convergenza al di fuori dell'intervallo visto che $r=1$.

Per quanto riguarda la somma, detta

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2+2n},$$

si ha $S(0)=0$ e

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n+2}$$

Moltiplicando per x^3 si ha

$$x^3 S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+2}}{n+2}$$

Detta $F(x)=x^3 S'(x)$, si ha $F(0)=0$ e

$$F'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n+1}=x^2\sum_{k=0}^{\infty}x^k=\frac{x^2}{1-x}$$

Perciò

$$F(x)=\int_0^x\frac{t^2\,dt}{1-t}=\int_0^x\left(-t-1-\frac{1}{t-1}\right)dt$$

$$=-\frac{t^2}{2}-t-\log|t-1|\Big|_{t=0}^{t=x}=$$

$$=-\frac{x^2}{2}-x-\log(1-x)$$

Di conseguenza

$$S'(x)=\frac{F(x)}{x^3}=-\frac{1}{2x}-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}\log(1-x)$$

$$S(x)=\int_0^x\left[-\frac{1}{2t}-\frac{1}{t^2}-\frac{1}{t^3}\log(1-t)\right]dt$$

Dobbiamo perciò calcolare:

$$\int \frac{1}{t^3} \log(1-t)\, dt = \quad \text{per parti}$$

$$= -\frac{1}{2t^2} \log(1-t) + \int \frac{1}{2t^2} \frac{1}{t-1}\, dt$$

Si tratta di decomporre (fratti semplici) la funzione razionale:

$$\frac{1}{t^2(t-1)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t^2} + \frac{C}{t-1}$$

$$= \frac{At^2 - At + Bt - B + Ct^2}{t^2(t-1)}$$

$$\begin{cases} A + C = 0 \\ -A + B = 0 \\ -B = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} A = B = -1 \\ B = -1 \\ C = -A = 1 \end{cases}$$

Perciò

$$\int \frac{1}{t^3} \log(1-t)\, dt = -\frac{1}{2t^2} \log(1-t) +$$

$$+ \frac{1}{2} \int \left(-\frac{1}{t} - \frac{1}{t^2} + \frac{1}{t-1} \right) dt =$$

$$= -\frac{1}{2t^2} \log(1-t) - \frac{1}{2} \log|t| + \frac{1}{2t} + \frac{1}{2} \log|t-1|$$

Tornando al nostro problema si ha quindi

$$S(x) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left[-\cancel{\frac{1}{2}\log|t|} + \frac{1}{t} + \frac{1}{2t^2}\log(1-t) + \cancel{\frac{1}{2}\log|t|} - \frac{1}{2t} - \frac{1}{2}\log(1-t) \right]_{t=\varepsilon}^{t=x}$$

Si ha

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{\log(1-\varepsilon) - \varepsilon^2 \log(1-\varepsilon) + \varepsilon}{2\varepsilon^2} =$$

applicando l'Höpital

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{\frac{1}{\varepsilon - 1} - 2\varepsilon \log(1-\varepsilon) - \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon - 1} + 1}{4\varepsilon} =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{-\varepsilon \cancel{-1} \cancel{+1} - 2\varepsilon \log(1-\varepsilon)}{4\varepsilon} =$$

riapplicando l'Höpital

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{-1 - 2\log(1-\varepsilon) - \frac{2\varepsilon}{\varepsilon - 1}}{4} = -\frac{1}{4}$$

e inoltre

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{1}{2x} + \frac{1}{2x^2}\log(1-x) - \frac{1}{2}\log(1-x) + \frac{1}{4} =$$

$$= \lim_{x \to 1^-} \frac{1}{2x} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2x^2}\log(1-x)\left(1 - x^2\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

Perciò

$$S(x) = \begin{cases} \frac{1}{2x} + \frac{1}{2x^2}\log(1-x) - \frac{1}{2}\log(1-x) + \frac{1}{4} & \text{per } -1 \leq x < 1,\ x \neq 0 \\ 0 & \text{per } x = 0 \\ 3/4 & \text{per } x = 1, \end{cases}$$

$$S : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Analisi Matematica 2 (prima parte) — Prof. B. Rubino
Ingegneria Edile–Architettura A.A. 2001/02

Cognome e nome:________________________ Tempo: 90 minuti

Matricola:________________ *L'Aquila, 9 gennaio 2002*

Esercizio 1

Studiare il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{1+\tan^2(t)}{1+\tan^2(y)} \\ \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Esercizio 2

Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \arctan\left(\frac{n}{n^2+5}\right)$$

Esercizio 3 (a)

Calcolare il

$$\lim_{|(x,y,z)|\to 0} \frac{xyz}{x^2+y^2+z^2}$$

Esercizio 3 (b)

Trovare i punti stazionari della funzione

$$f(x,y,z) = e^{x^2+y^2} + e^{-z^2}$$

e classificarli.

Esercizio 4

Calcolare l'integrale doppio

$$I_R = \iint_{\mathcal{D}_R} e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy,$$

dove

$$\mathcal{D}_R = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2+y^2 \le R^2\right\}.$$

Calcolare il

$$\lim_{R\to+\infty} I_R$$

ANALISI MATEMATICA 2 (PRIMA PARTE)
INGEGNERIA EDILE-ARCHITETTURA A.A. 2001-02

L'AQUILA, 9.1.02

ESERCIZIO 1.

L'equazione è a variabili separabili. La funzione

$$F(t,y) = \frac{1+tg^2(t)}{1+tg^2(y)}$$

è di classe C^1 in un intorno del punto $(0,0)$. Vale perciò il teorema di Cauchy di esistenza e unicità locale. Si osservi che $y(t) = t$ è soluzione del problema perchè verifica l'equazione e il dato iniziale. In base all'unicità è anche l'unica soluzione locale. Tale soluzione è definita per $t \in (-\pi/2, \pi/2)$.
Poichè la funzione F non può essere estesa, non ha senso parlare di estendere la soluzione fuori da tale intervallo.

ESERCIZIO 2

Si osservi che

$$0 \le \frac{n}{n^2+5} < 1 \qquad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}.$$

Di conseguenza

$$0 \le \operatorname{arctg}\left(\frac{n}{n^2+5}\right) < \frac{\pi}{4}$$

Si osservi poi che, se

$$\varphi(t) = \frac{t}{t^2+5}, \qquad \text{allora}$$

$$\varphi'(t) = \frac{t^2+5-t\,(2t)}{(t^2+5)^2} = \frac{-t^2+5}{(t^2+5)^2}$$

Perciò $\varphi'(t) < 0$ per ogni $-\sqrt{5} < t < \sqrt{5}$.

In particolare la successione

$a_n = \dfrac{n}{n^2+5}$ è definitivamente monotona decrescente.

Poichè la funzione arctg è monotona crescente,

$$b_n = \operatorname{arctg}\left(\frac{n}{n^2+5}\right), \quad n \ge 3$$

è monotona decrescente; poichè poi

$\lim_{n\to\infty} b_n = 0$, la serie data è di Leibnitz per cui

vi è convergenza

ESERCIZIO 3(a)

Passiamo in coordinate polari

$$\begin{cases} x = \rho \cos\vartheta \operatorname{sen}\varphi \\ y = \rho \operatorname{sen}\vartheta \operatorname{sen}\varphi \\ z = \rho \cos\varphi \end{cases} \qquad \begin{array}{l} \rho \geq 0 \\ 0 \leq \vartheta \leq 2\pi \\ 0 \leq \varphi \leq \pi \end{array}$$

Si ha

$$\lim_{|(x,y,z)| \to 0} \frac{xyz}{x^2+y^2+z^2}$$

$$= \lim_{\rho \to 0^+} \frac{\rho^{\cancel{3}} \cos\vartheta \operatorname{sen}\vartheta \operatorname{sen}^2\varphi \cos\varphi}{\cancel{\rho^2}} = 0$$

in quanto tutta la parte trigonometrica è limitata in valore assoluto da 1.

ESERCIZIO 3(b)

Risulta

$$f_x = 2x e^{x^2+y^2}, \quad f_y = 2y e^{x^2+y^2}, \quad f_z = -2z e^{-z^2}$$

L'unico punto che annulla il gradiente è, perciò, l'origine.

Si ha inoltre

$$f_{xx} = 2 e^{x^2+y^2} + 4x^2 e^{x^2+y^2}$$

$$f_{xy} = 4xy e^{x^2+y^2}, \quad f_{xz} = 0$$

$$f_{yy} = 4y^2 e^{x^2+y^2} + 2e^{x^2+y^2}, \quad f_{yz} = 0$$

$$f_{zz} = -2e^{-z^2} + 4z^2 e^{-z^2}$$

valutati nell'origine danno luogo alla seguente matrice Hessiana:

$$H_f(0,0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

La matrice ha due autovalori positivi e uno negativo

L'origine è perciò punto di sella.

ESERCIZIO 4

Passiamo il dominio D_R in coordinate polari:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\vartheta & 0 \le \rho \le R \\ y = \rho\,\mathrm{sen}\,\vartheta & 0 \le \vartheta < 2\pi \end{cases}$$

Perciò

$$I_R = \int_0^R \int_0^{2\pi} \rho\, e^{-\rho^2}\, d\rho\, d\vartheta$$

$$= 2\pi\left(-\frac{1}{2}\right) e^{-\rho^2}\Big|_{\rho=0}^{\rho=R} = -\pi\left(e^{-R^2}-1\right)$$

$$= \pi\left(1-e^{-R^2}\right)$$

Perciò

$$\lim_{R\to\infty} I_R = \pi$$

Analisi Matematica 2 (seconda parte) — Prof. B. Rubino
Ingegneria Edile–Architettura A.A. 2001/02

Cognome e nome:______________________________ Tempo: 90 minuti

Matricola:______________________ *L'Aquila, 9 gennaio 2002*

Esercizio A

Studiare i punti critici del sistema dinamico

$$\begin{cases} \dot{x} = \log(1 + x + y) \\ \dot{y} = y \end{cases}$$

Esercizio B

Studiare la convergenza puntuale e uniforme per la serie di potenze ($z \in \mathbb{C}$)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5 + \sin n}{1 + n^2} z^n$$

Esercizio C

Sia dato il campo vettoriale

$$F(x, y) = \left(\frac{2x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)$$

Stabilire *a priori* se è conservativo e, in caso affermativo, calcolarne un potenziale.

ANALISI MATEMATICA 2 (SECONDA PARTE)
INGEGNERIA EDILE-ARCHITETTURA A. A. 2001/02

L'Aquila 9. 1. 2001

ESERCIZIO A.

I punti critici sono dati dalle soluzioni del sistema dinamico

$$\begin{cases} \dot{x}=0 \\ \dot{y}=0 \end{cases}, \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} \log(1+x+y)=0 \\ y=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x+y=0 \\ y=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$$

L'unico punto critico è l'origine $O=(0,0)$. Detti

$$\begin{cases} f(x,y)=\log(1+x+y) \\ g(x,y)=y \end{cases}$$

si ha

$$\begin{pmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{1+x+y} & \frac{1}{1+x+y} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

che calcolato nell'origine dà

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Per il sistema lineare associato l'origine è un nodo a stella. Per il non lineare di partenza l'origine è un nodo. Poichè l'autovalore (doppio) $\lambda = 1$ è positivo si tratta di nodo repulsivo (instabile).

ESERCIZIO B

Sia $a_n = \dfrac{5 + \operatorname{sen} n}{1 + n^2}$

Stabiliamo intanto il raggio di convergenza.
Si osservi che nel nostro caso non esiste il limite del rapporto

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}}$$

Bisogna perciò ricorrere al limite della radice n-esima:

$$r = \frac{1}{\lim \sqrt[n]{a_n}} = 1$$

dato che

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{4}{1+n^2}} \leq \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{6}{1+n^2}}$$

ed entrambi questi limiti sono uguali a 1.
Proviamo la convergenza totale in $|z| \leq 1$
Si ha

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sup_{|z|\leq 1} \left| \frac{5 + \operatorname{sen} n}{1 + n^2} z^n \right| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{5 + \operatorname{sen} n}{1 + n^2} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{6}{1+n^2}$$

che converge.
Vi è perciò convergenza totale in $|z| \leq 1$ e di conseguenza anche convergenza puntuale e uniforme nello stesso cerchio.

ESERCIZIO C

Il campo è definito su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, dominio non semplicemente connesso.

Proviamo a vedere per prima cosa se il campo è irrotazionale

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{2y\sqrt{x^2+y^2} - (2x^2+y^2)\frac{\cancel{2}y}{\cancel{2}\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{y\sqrt{x^2+y^2} - xy\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}$$

$$= \frac{2y\sqrt{x^2+y^2} - y\sqrt{x^2+y^2} - x^2\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}$$

$$= \frac{2y\sqrt{x^2+y^2} - y\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} - x^2\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}$$

$$= \frac{2y\sqrt{x^2+y^2} - (2x^2+y^2)\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}$$

per cui $\dfrac{\partial F_1}{\partial y} = \dfrac{\partial F_2}{\partial x}$ e il campo è irrotazionale.

Per verificare se è conservativo calcoliamo la circuitazione lungo una curva chiusa che circonda l'origine (unica singolarità): per convenienza scegliamo la circonferenza unitaria:

$$\begin{cases} x = \cos\vartheta \\ y = \operatorname{sen}\vartheta \end{cases} \qquad \vartheta \in [0, 2\pi)$$

Risulta

$$\oint_\gamma F = \int_0^{2\pi} (F_1 \dot{x} + F_2 \dot{y})\, d\vartheta =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[(2\cos^2\vartheta + \text{sen}^2\vartheta)(-\text{sen}\,\vartheta) + \text{sen}\,\vartheta \cos\vartheta \cos\vartheta \right] d\vartheta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(-2\cos^2\vartheta\, \text{sen}\,\vartheta - \text{sen}^3\vartheta + \cos^2\vartheta\, \text{sen}\,\vartheta \right) d\vartheta =$$

$$= \int_0^{2\pi} -\text{sen}\,\vartheta \left(\cos^2\vartheta + \text{sen}^2\vartheta \right) d\vartheta =$$

$$= -\int_0^{2\pi} \text{sen}\,\vartheta\, d\vartheta = 0$$

per cui il campo è conservativo. Calcoliamo ora il potenziale

$$P(x,y) = \int F_2(x,y)\, dy + \varphi(x) = x\sqrt{x^2+y^2} + \varphi(x),$$

dove φ è una generica funzione di x che deve verificare l'equazione

$$\frac{\partial P}{\partial x}(x,y) = F_1(x,y), \quad \text{ovvero}$$

$$\sqrt{x^2+y^2} + x \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+y^2}} + \varphi'(x) = \frac{2x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

da cui $\varphi'(x) = 0$. Di conseguenza

$$P(x,y) = x\sqrt{x^2+y^2} + K, \quad K \in \mathbb{R}.$$

Analisi Matematica 2 (prima parte) — Prof. B. Rubino
Ingegneria Edile–Architettura A.A. 2001/02

Cognome e nome:________________________________ Tempo: 90 minuti

Matricola:________________________ *L'Aquila, 28 gennaio 2002*

Esercizio 1

a) Trovare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y'' + y = 0.$$

b) Trovare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y'' + y = \sin(t).$$

c) Trovare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y'' + y = \cos(t).$$

d) Trovare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y'' + y = \sin(t) + \cos(t).$$

Esercizio 2

Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2 + sin\,(n^3)}{1 + n^2}$$

Esercizio 3

Calcolare la distanza tra la parabola $y = x^2$ e la retta $y = x - 10$.

Esercizio 4

Calcolare il volume del solido

$$\mathcal{D} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, \ 0 \leq x + y \leq 10, \ 0 \leq z \leq 1\right\}.$$

ANALISI MATEMATICA 2 (PRIMA PARTE) - L'Aquila, 28.1.02
INGEGNERIA EDILE-ARCHITETTURA A.A. 2001-02

ESERCIZIO 1.

Si tratta di equ. diff. lineare a coefficienti costanti del secondo ordine.

a) Il polinomio caratteristico associato è

$\lambda^2 + 1 = 0$ le cui soluzioni sono $\lambda = \mp i$.

Di conseguenza l'integrale generale è dato da

$y(t) = c_1 \,\mathrm{sen}\, t + c_2 \cos t$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

b) Poichè il termine non omogeneo $g(t) = \mathrm{sen}\, t$ è soluzione dell'equazione omogenea, cerco (metodo delle funzioni simili) una soluzione particolare della forma

$\bar{y}(t) = t(k_1 \,\mathrm{sen}\, t + k_2 \cos t)$, da cui

$\bar{y}'(t) = k_1 \,\mathrm{sen}\, t + k_2 \cos t + k_1 t \cos t - k_2 t \,\mathrm{sen}\, t$

$\bar{y}''(t) = k_1 \cos t - k_2 \,\mathrm{sen}\, t + k_1 \cos t - k_1 t \,\mathrm{sen}\, t - k_2 \,\mathrm{sen}\, t - k_2 t \cos t$

e sostituendo nell'equazione differenziale si ha

$k_1 \cos t - k_2 \,\mathrm{sen}\, t + k_1 \cos t - \cancel{k_1 t \,\mathrm{sen}\, t} - k_2 \,\mathrm{sen}\, t - \cancel{k_2 t \cos t} +$

$+ \cancel{t k_1 \,\mathrm{sen}\, t} + \cancel{k_2 t \cos t} = \mathrm{sen}\, t$

la cui

$$2K_1 = 0 \qquad \begin{cases} K_1 = 0 \\ K_2 = -\frac{1}{2} \end{cases}$$
$$-2K_2 = 1$$

La soluzione particolare è perciò

$$\bar{y}(t) = -\frac{1}{2} t \cos t$$

e la soluzione generale è data da

$$y(t) = -\frac{1}{2} t \cos t + c_1 \operatorname{sen} t + c_2 \cos t, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Come per il caso (b) il termine non omogeneo $h(t) = \cos t$ è soluzione dell'equazione omogenea: la soluzione particolare la cerco della forma

$$\bar{y}(t) = t(K_1 \operatorname{sen} t + K_2 \cos t)$$

e sfruttando le derivate svolte nel caso precedente e sostituendo nell'equazione si ha ora

$$2K_1 \cos t - 2K_2 \operatorname{sen} t = \cos t, \qquad \text{da cui}$$

$$2K_1 = 1 \qquad \begin{cases} K_1 = \frac{1}{2} \\ K_2 = 0 \end{cases}$$
$$-2K_2 = 0$$

La soluzione particolare è perciò

$$\overline{y}(t) = \frac{1}{2} t \operatorname{sen} t$$

e l'integrale generale è dato da

$$y(t) = \frac{1}{2} t \operatorname{sen} t + c_1 \operatorname{sen} t + c_2 \cos t, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$

d) Sfruttato quanto trovato nei casi precedenti e il principio di sovrapposizione si ha ora come integrale generale

$$y(t) = \frac{1}{2} t \operatorname{sen} t - \frac{1}{2} t \cos t + c_1 \operatorname{sen} t + c_2 \cos t, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

ESERCIZIO 2

Si tratta di una serie a termini positivi. Inoltre, detta

$$a_n = \frac{2+\operatorname{sen}(n^3)}{1+n^2}, \quad \text{si ha}$$

$$\frac{1}{1+n^2} \leq a_n \leq \frac{3}{1+n^2}.$$

Poichè

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3}{1+n^2} = 3\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}$$

e tale serie converge (per confronto con $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$),

per confronto converge anche la serie di partenza.

ESERCIZIO 3

Osservato che la parabola e la retta date non si intersecano, la distanza richiesta sarà positiva.

E' più opportuno in questi casi (per eliminare inutili complicazioni con la funzione radice) calcolare intanto il quadrato della distanza e fare solo alla fine la radice.

Sia $P=(x,y)$ il generico punto sulla parabola e

$Q=(t,s)$ il generico punto sulla retta. Si ha allora

$y=x^2$ e $s=t-10$

Risulta allora

$$f(x,t)=d^2(P,Q)=(x-t)^2+\left(x^2-(t-10)\right)^2$$

$$f(x,t)=x^2-2xt+t^2+x^4-2x^2(t-10)+(t-10)^2$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}=2x-2t+4x^3-4x(t-10)\\[2mm] \dfrac{\partial f}{\partial t}=-2x+2t-2x^2+2(t-10)\end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t}=0 \iff 4t=2x+2x^2+20$$

$t=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}x^2+5$ che sostituito in $\frac{\partial f}{\partial x}=0$ ci dà

$$2x-x-x^2-10+4x^3-2x^2-2x^3-20x+40x=0$$

$$2x^3-3x^2+21x-10=0$$

Le soluzioni possono essere cercate graficamente: sia

$\varphi(x) = 2x^3 - 3x^2 + 21x - 10.$

$\varphi'(x) = 6x^2 - 6x + 21$

$\varphi'(x) = 0 \qquad 2x^2 - 2x + 7 = 0$

$\Delta < 0$, per cui $\varphi'(x) > 0 \quad \forall x.$
Inoltre

$$\varphi(x) \xrightarrow{x \to -\infty} -\infty, \quad \varphi(x) \xrightarrow{x \to +\infty} +\infty$$

$\varphi(0) = -10, \quad \varphi(1) = 2 - 3 + 21 - 10 = 10$

Perciò l'unico zero della φ (è strettamente monotona) si trova tra 0 e 1
Sia x_0 tale punto. Allora

$t_0 = \frac{1}{2} x_0 + \frac{1}{2} x_0^2 + 5.$

Il punto x_0 può essere calcolato con maggiore precisione solo con metodi numerici.
La distanza è poi data da

$d = \sqrt{f(x_0, t_0)}$.

ESERCIZIO 4

Si tratta della porzione di spazio compresa tra i due cilindri

$$x^2+y^2=1 \quad e \quad x^2+y^2=4,$$

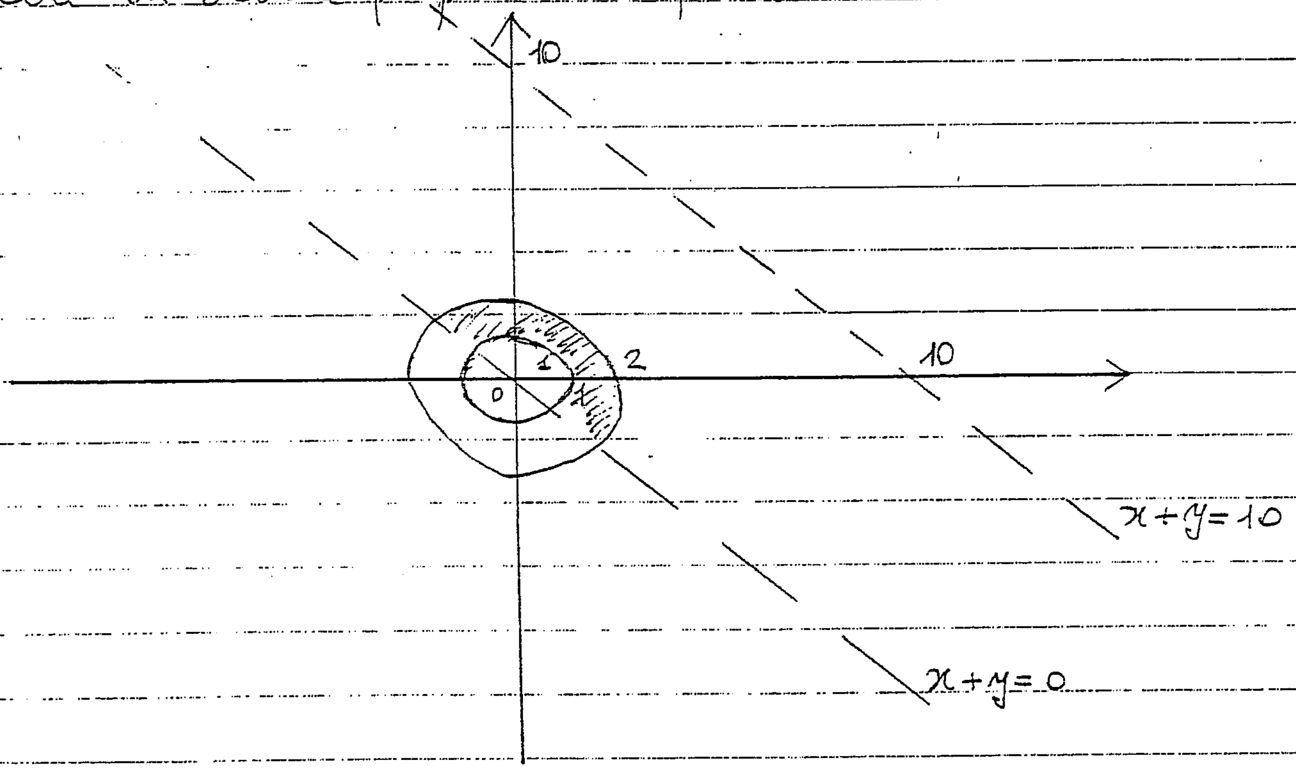
i piani

$$z=0 \quad e \quad z=1$$

e i piani

$$x+y=0 \quad e \quad x+y=10.$$

Eccetto i piani $z=0$ e $z=1$ il tutto lo si può intanto vedere in sezione proprio sul piano $z=0$.



La zona interessata è quella tratteggiata: come si vede la limitazione $x+y \leq 10$ è superflua.
La parametrizzazione di tale zona è data da

$$\begin{cases} x = \rho\cos\vartheta \\ y = \rho \operatorname{sen}\vartheta \end{cases} \qquad \begin{array}{c} 1 \leq \rho \leq 2 \\ -\frac{\pi}{4} \leq \vartheta \leq \frac{3}{4}\pi \end{array}$$

Lo jacobiano del cambio di variabili è ρ
Il volume del solido D è perciò dato da

$$|D| = \int_0^1 \left(\int_1^2 \left(\int_{-\pi/4}^{3/4\pi} \rho \, d\vartheta \right) d\rho \right) dz$$

$$= \int_0^1 dz \int_1^2 \rho \, d\rho \int_{-\pi/4}^{3/4\pi} d\vartheta = \frac{1}{2} \rho^2 \Big|_1^2 \cdot \pi = \frac{1}{2}\pi(4-1) = \frac{3}{2}\pi.$$

Analisi Matematica 2 (seconda parte) — Prof. B. Rubino
Ingegneria Edile–Architettura A.A. 2001/02

Cognome e nome:________________________ Tempo: 90 minuti

Matricola:__________________ *L'Aquila, 28 gennaio 2002*

Esercizio A

Studiare il problema ai limiti

$$\begin{cases} y'' - y = 1 \\ y(0) = y(\pi) = 0. \end{cases}$$

Esercizio B

Studiare la convergenza puntuale e uniforme per la serie di potenze ($z \in \mathbb{C}$)

$$\sum_{n=0}^{\infty} n\,(n+1)\,z^n$$

Se ne calcoli, se ciò ha senso, la somma.

Esercizio C

Verificare il teorema di Gauss (della divergenza) per il campo vettoriale $F\,(x, y, z) = \left(x^3, y^3, z^3\right)$ e il dominio

$$\mathcal{D} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\right\}.$$

ANALISI MATEMATICA 2 (seconda parte) – L'Aquila, 28.1.02
Ingegneria Edile-Architettura – A.A. 2001-02

ESERCIZIO 1.

L'equazione differenziale del problema è lineare a coefficienti costanti del II ordine. Il polinomio caratteristico associato è

$$\lambda^2 - 1 = 0, \qquad \lambda = \mp 1 \text{ con molteplicità } 1.$$

La soluzione generale dell'omogenea associata è

$$y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{t}, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Una soluzione particolare, utilizzando il metodo delle funzioni simili, la si cerca della forma

$\bar{y}(t) = K$, da cui sostituendo

$-k = 1$, ovvero $K = -1$.

La soluzione generale dell'equ. differenziale del problema è allora

$$y(t) = -1 + c_1 e^{-t} + c_2 e^{t}, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Imponendo le condizioni ai limiti si ha

$$\begin{cases} 0 = y(0) = -1 + c_1 + c_2 \\ 0 = y(\pi) = -1 + c_1 e^{-\pi} + c_2 e^{\pi} \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_2 = 1 - c_1 \\ -1 + c_1 e^{-\pi} + (1-c_1)\, e^{\pi} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1\left(e^{-\pi} - e^{\pi}\right) = 1 - e^{\pi} \\ c_2 = 1 - c_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1 = \dfrac{1 - e^{\pi}}{e^{-\pi} - e^{\pi}} \\ c_2 = 1 - \dfrac{1 - e^{\pi}}{e^{-\pi} - e^{\pi}} = \dfrac{e^{-\pi} \cancel{- e^{\pi}} - 1 \cancel{+ e^{\pi}}}{e^{-\pi} - e^{\pi}} \end{cases}$$

da cui la soluzione del problema ai limiti è

$$y(t) = -1 + \frac{1 - e^{\pi}}{e^{-\pi} - e^{\pi}}\, e^{-t} + \frac{e^{-\pi} - 1}{e^{-\pi} - e^{\pi}}\, e^{t}$$

ESERCIZIO B

Sia $a_n = n(n+1)$. Utilizzando il criterio del rapporto il raggio di convergenza risulta dato da

$$r = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\cancel{(n+1)}}{\cancel{(n+1)}(n+2)} = 1$$

Si osservi che sui punti della circonferenza di raggio 1 non è verificata la condizione necessaria, dato che, se

$z = e^{i\vartheta}$, $\vartheta \in [0, 2\pi)$,

$$\lim_{n\to\infty} \left| n(n+1) e^{in\vartheta} \right| = \lim_{n\to\infty} n(n+1) = +\infty.$$

Si ha perciò:

a) convergenza puntuale in $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$

b) convergenza uniforme in ogni dominio D tale che $\exists\, \varepsilon > 0$ per cui

$$D \subset \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1 - \varepsilon\}.$$

Sia ora $S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n+1) z^n$.

Risulta

$$\int_0^z S(w)\,dw = \sum_{n=0}^{\infty} n\, z^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} n\, z^{n+1} =$$

$$= z^2 \sum_{n=1}^{\infty} n\, z^{n-1} = z^2 \sum_{n=1}^{\infty} D(z^n) = z^2 D\left(\sum_{n=1}^{\infty} z^n\right) =$$

$$= z^2 D\left(\frac{z}{1-z}\right) = z^2 \frac{1-\cancel{z}+\cancel{z}}{(1-z)^2} = \frac{z^2}{(1-z)^2}$$

Perciò

$$S(z) = D\left(\frac{z^2}{(1-z)^2}\right) = \frac{2z(1-z)^2 + z^2 \cdot 2(1-z)}{(1-z)^4}$$

$$= \frac{2z - 4z^2 + \cancel{2z^3} + 2z^2 - \cancel{2z^3}}{(1-z)^4} = \frac{2z-2z^2}{(1-z)^4}$$

$$= 2z \frac{1}{(1-z)^3}$$

è la somma cercata.

ESERCIZIO C

Il dominio D è la sfera di raggio 1.

Si ha poi:

$\underline{n} = (x, y, z)$ è il versore normale alla superficie (corrisponde al raggio)

$\operatorname{div} F = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2$

Dobbiamo verificare che

$$\iiint_D \operatorname{div} F \, dx\,dy\,dz = \iint_{\partial D} F \cdot n \, d\sigma$$

Parametrizziamo D:

$$\begin{cases} x = \rho \operatorname{sen}\psi \cos\vartheta \\ y = \rho \operatorname{sen}\psi \operatorname{sen}\vartheta \\ z = \rho \cos\psi \end{cases} \qquad \begin{array}{l} 0 \le \rho \le 1 \\ 0 \le \psi \le \pi \\ 0 \le \vartheta \le 2\pi \end{array} \qquad \underline{\underline{J = \rho^2 \operatorname{sen}\psi \ge 0}}$$

Risulta

$$\iiint_D \operatorname{div} F \, dx\,dy\,dz = \int_0^1 \left(\int_0^\pi \left(\int_0^{2\pi} 3\rho^2 \cdot \rho^2 \operatorname{sen}\psi \, d\vartheta \right) d\psi \right) d\rho$$

$$= 3\int_0^1 \rho^4 \, d\rho \int_0^\pi \operatorname{sen}\psi \, d\psi \int_0^{2\pi} d\vartheta = \frac{3}{5} \, 2\pi \cdot (-\cos\psi)\Big|_0^\pi$$

$$= \frac{6\pi}{5} \cdot 2 = \frac{12}{5}\pi.$$

Per quanto riguarda il flusso attraverso la superficie si ha invece:

$$\begin{cases} x = \operatorname{sen}\psi \cos\vartheta \\ y = \operatorname{sen}\psi \operatorname{sen}\vartheta \\ z = \cos\psi \end{cases}$$

Detto $X = (x, y, z)$, allora

$$X_\psi \wedge X_\vartheta = \det \begin{pmatrix} i & j & k \\ \cos\psi\cos\vartheta & \cos\psi \operatorname{sen}\vartheta & -\operatorname{sen}\psi \\ -\operatorname{sen}\psi \operatorname{sen}\vartheta & \operatorname{sen}\psi\cos\vartheta & 0 \end{pmatrix}$$

$$= i\left(\operatorname{sen}^2\psi \cos\vartheta\right) - j\left(-\operatorname{sen}^2\psi \operatorname{sen}\vartheta\right) + k\left(\operatorname{sen}\psi\cos\psi\cos^2\vartheta\right.$$

$$\left. + \operatorname{sen}\psi\cos\psi \operatorname{sen}^2\vartheta\right)$$

$$= i \operatorname{sen}^2\psi\cos\vartheta + j \operatorname{sen}^2\psi \operatorname{sen}\vartheta + k \operatorname{sen}\psi\cos\psi$$

$$\left| X_\psi \wedge X_\vartheta \right|^2 = \operatorname{sen}^4\psi\cos^2\vartheta + \operatorname{sen}^4\psi \operatorname{sen}^2\vartheta + \operatorname{sen}^2\psi\cos^2\psi$$

$$= \operatorname{sen}^4\psi + \operatorname{sen}^2\psi\cos^2\psi = \operatorname{sen}^2\psi,$$ da cui

$$\left| X_\psi \wedge X_\vartheta \right| = \operatorname{sen}\psi \geq 0$$

Perciò

$$\iint_{\partial D} F \cdot \underline{n}\, d\sigma = \int_0^\pi \left(\int_0^{2\pi} \left(\operatorname{sen}^4\psi\cos^4\vartheta + \operatorname{sen}^4\psi \operatorname{sen}^4\vartheta + \cos^4\psi\right) \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \operatorname{sen}\psi \, d\vartheta \right) d\psi$$

Risulta

.) $\int_0^{\pi} sen^5\psi \, d\psi = \int_0^{\pi} sen^4\psi \, sen\,\psi \, d\psi =$

$= \int_0^{\pi} (1-\cos^2\psi)^2 sen\,\psi \, d\psi = \int_0^{\pi} \Big(sen\,\psi - 2\cos^2\psi \, sen\,\psi$

$+ \cos^4\psi \, sen\,\psi \Big) d\psi =$

$= -\cos\psi + \frac{2}{3}\cos^3\psi - \frac{1}{5}\cos^5\psi \Big|_{\psi=0}^{\psi=\pi} =$

$= 1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5} + 1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5} = \frac{30-20+6}{15} = \frac{16}{15}$

b) $\int_0^{\pi} \cos^4\psi \, sen\,\psi \, d\psi = -\frac{1}{5}\cos^5\psi \Big|_{\psi=0}^{\psi=\pi} = \frac{2}{5}$

c) $\int_0^{2\pi} \left(sen^4\psi + \cos^4\psi\right) d\psi =$

visto che i grafici di $sen^4\psi$ e di $\cos^4\psi$ sono solo traslati l'uno rispetto all'altro (e periodici di periodo π)

$= 2\int_0^{2\pi} sen^4\psi \, d\psi = 2\int_0^{2\pi} \left(sen^2\psi - sen^2\psi \cos^2\psi\right) d\psi$

$= 2\pi - \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} sen^2(2\psi)\, d\psi = 2\pi - \frac{1}{4}\int_0^{4\pi} sen^2\alpha \, d\alpha = 2\pi - \frac{\pi}{2} = \frac{3}{2}\pi$

Abbiamo perciò

$$\iint_{\partial D} F \cdot n \, d\sigma = \int_0^{\pi} sen^5 \varphi \, d\varphi \int_0^{2\pi} (\cos^4 \vartheta + \cos^4 \vartheta) \, d\vartheta +$$

$$+ \int_0^{\pi} 2\pi \cos^4 \varphi \, sen \, \varphi \, d\varphi =$$

$$= \frac{\cancel{16}^{\,8}}{\cancel{15}_{\,5}} \cdot \frac{\cancel{3}^{\,1}}{\cancel{2}} \pi + 2\pi \frac{2}{5} = \frac{8+4}{5} \pi = \frac{12}{5} \pi$$

La verifica del teorema di Gauss è perciò raggiunta.

Analisi Matematica 2 (prima parte) — Prof. B. Rubino
Ingegneria Edile–Architettura A.A. 2001/02

Cognome e nome:________________________________ Tempo: 90 minuti

Matricola:________________________ *L'Aquila, 25 febbraio 2002*

Esercizio 1

a) Trovare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y''' - 5y'' + 4y' = 0.$$

b) Trovare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y''' - 5y'' + 4y' = 1.$$

c) Trovare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y''' - 5y'' + 4y' = e^t.$$

d) Trovare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y''' - 5y'' + 4y' = e^{4t}.$$

e) Trovare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y''' - 5y'' + 4y' = 1 + e^t + e^{4t}.$$

Esercizio 2

Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} 1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right)$$

Esercizio 3

Calcolare, se ciò ha senso, il massimo e il minimo assoluto della funzione

$$f(x,y) = x + \sqrt{2}\, y$$

sul dominio

$$\mathcal{D} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ y \geq \frac{\sqrt{3}}{3}x, \ y \leq \sqrt{3}\, x, \ x^2 + y^2 \leq 4 \right\}.$$

Esercizio 4

Calcolare l'integrale doppio

$$\iint_{\mathcal{D}} \left(x^2 + y^2\right)^2 dx\, dy,$$

dove

$$\mathcal{D} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ y \geq \frac{\sqrt{3}}{3}x, \ y \leq \sqrt{3}\, x, \ x^2 + y^2 \leq 4 \right\}.$$

ANALISI MATEMATICA 2 (prima parte) - L'Aquila, 25.2.02
INGEGNERIA EDILE-ARCHITETTURA - A. A. 2001-02

ESERCIZIO 1
Si tratta di equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti del III ordine

a) L'equazione è omogenea. Il polinomio caratteristico associato è dato da

$$\lambda^3 - 5\lambda^2 + 4\lambda = 0$$

$$\lambda(\lambda^2 - 5\lambda + 4) = 0$$

$$\lambda(\lambda - 1)(\lambda - 4) = 0$$

Le soluzioni sono perciò $\lambda = 0$, $\lambda = 1$, $\lambda = 4$.
L'integrale generale è perciò dato da

$$y(t) = c_1 + c_2 e^{t} + c_3 e^{4t}, \quad c_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1, 2, 3.$$

b) Poichè $\lambda = 0$ è soluzione del polinomio caratteristico, cerco una soluzione dell'equazione del tipo

$\bar{y}(t) = Kt$, da cui sostituendo

$$4K = 1, \quad K = \frac{1}{4}.$$

La soluzione generale è perciò data da

$$y(t) = \frac{t}{4} + c_1 + c_2 e^{t} + c_3 e^{4t}, \quad c_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1, 2, 3.$$

c) Poichè $\lambda = 1$ è soluzione del polinomio caratteristico, cerco una soluzione dell'equazione del tipo

$$\bar{y}(t) = kt\, e^t$$

$$\bar{y}'(t) = k(t+1)e^t, \quad \bar{y}''(t) = k(t+2)e^t, \quad \bar{y}'''(t) = k(t+3)e^t$$

e sostituendo nell'equazione si ha

$$k(t+3)e^t - 5k(t+2)e^t + 4k(t+1)e^t = e^t,$$

da cui

$$k(\cancel{t}+3-\cancel{5t}-10+\cancel{4t}+4) = 1$$

$$-3k = 1, \quad k = -\frac{1}{3}$$

La soluzione generale è data da

$$y(t) = -\frac{1}{3}t\, e^t + c_1 + c_2 e^t + c_3 e^{4t}, \quad c_i \in \mathbb{R}, \; i = 1,2,3.$$

d) Anche $\lambda = 4$ è soluzione del polinomio caratteristico, per cui cerco una soluzione dell'equazione del tipo

$$\bar{y}(t) = kt\, e^{4t}$$

$$\bar{y}'(t) = k(4t+1)e^{4t}, \quad \bar{y}''(t) = k(16t+8)e^{4t},$$

$$\bar{y}'''(t) = k(64t+48)e^{4t}$$

e sostituendo nell'equazione si ha

$$K(64t+48)e^{4t}-5K(16t+8)e^{4t}+4K(4t+1)e^{4t}=e^{4t}$$

da cui

$$K(\cancel{64t}+48-\cancel{80t}-40+\cancel{16t}+4)=1$$

$$12K=1, \quad K=\frac{1}{12}$$

La soluzione generale è data da

$$y(t)=\frac{1}{12}\,t\,e^{4t}+c_1+c_2e^{t}+c_3e^{4t}, \quad c_i\in\mathbb{R}, \ i=1,2,3.$$

e) Usando il principio di sovrapposizione e quanto trovato nei punti precedenti si ha l'integrale generale

$$y(t)=\left(c_1+\frac{t}{4}\right)+\left(c_2-\frac{1}{3}t\right)e^{t}+\left(c_3+\frac{1}{12}t\right)e^{4t},$$

$c_i\in\mathbb{R}, \quad i=1,2,3.$

ESERCIZIO 2

Si tratta di una serie a termini positivi.
Possiamo usare il criterio del confronto asintotico.
Risulta

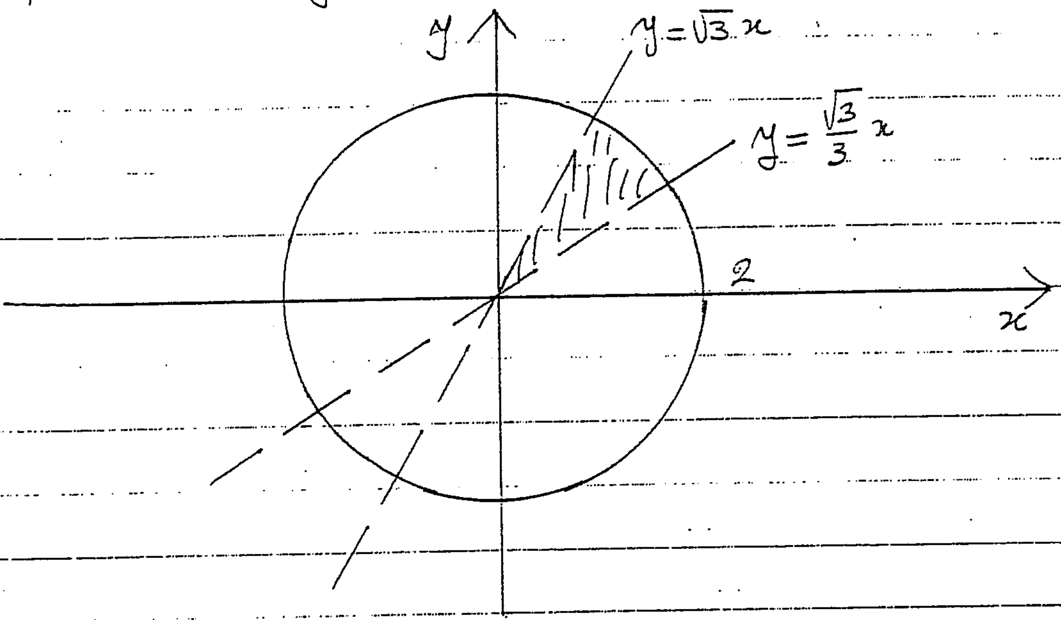
$$\lim_{n\to\infty} n^2\left(1-\cos\frac{1}{n}\right) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

Perciò

$$\sum_{n=1}^{\infty} 1-\cos\left(\frac{1}{n}\right) \simeq \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \quad \text{che converge}$$

e di conseguenza la nostra serie è convergente.

ESERCIZIO 3. La funzione è non negativa.
Per prima cosa disegnamo approssimativamente il dominio D



La regione è quella tratteggiata. In forma parametrica la possiamo riscrivere come

$$\begin{cases} x = \rho\cos\vartheta & 0 \le \rho \le 2 \\ y = \rho\,\text{sen}\,\vartheta & \frac{\pi}{6} \le \vartheta \le \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

Nelle nuove coordinate possiamo riscrivere la funzione come

$$g(\rho,\vartheta) = \rho\cos\vartheta + \sqrt{2}\,\rho\,\text{sen}\,\vartheta$$
$$= \rho(\cos\vartheta + \sqrt{2}\,\text{sen}\,\vartheta)$$

Sia $\varphi(\vartheta) = \cos\vartheta + \sqrt{2}\,\text{sen}\,\vartheta$

$$\varphi'(\vartheta) = -\text{sen}\,\vartheta + \sqrt{2}\cos\vartheta$$

$\varphi'(\vartheta) = 0$ per $\text{tg}\,\vartheta = \sqrt{2}$, $\vartheta_0 = \text{arctg}\,\sqrt{2}$

Si ha anche

$$\begin{cases} \operatorname{sen}^2 \vartheta_0 = 2\cos^2 \vartheta_0 \\ \operatorname{sen}^2 \vartheta_0 + \cos^2 \vartheta_0 = 1 \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} 3\cos^2 \vartheta_0 = 1 \\ \operatorname{sen}^2 \vartheta_0 = 1 - \cos^2 \vartheta_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \cos^2 \vartheta_0 = \frac{1}{3} \\ \operatorname{sen}^2 \vartheta_0 = \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos \vartheta_0 = \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \operatorname{sen} \vartheta_0 = \frac{\sqrt{6}}{3} \end{cases}$$

$$\varphi(\vartheta_0) = \frac{\sqrt{3}}{3} + \sqrt{2}\,\frac{\sqrt{6}}{3} = \sqrt{3}$$

$$\varphi\left(\frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{6} + \sqrt{2}\,\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}$$

$$\varphi\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3} + \sqrt{2}\,\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + \sqrt{2}\,\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1+\sqrt{6}}{2}$$

$\varphi(\vartheta_0)$ è il massimo assoluto di φ.

Si ha perciò massimo assoluto in ϑ_0 e $\rho = 2$.

$g(\vartheta_0, 2) = 2\sqrt{3}$ è il massimo assoluto, mentre

$g(\vartheta, 0) = 0$ è il minimo assoluto.

Si osservi che l'esercizio può essere svolto con molte tecniche alternative (curve di livello, teorema di Lagrange).

ESERCIZIO 4

Il dominio è lo stesso dell'esercizio precedente.

Usando le coordinate polari

$$\begin{cases} x = \rho \cos \vartheta \\ y = \rho \operatorname{sen} \vartheta \end{cases} \qquad 0 \le \rho \le 2 \, , \quad \frac{\pi}{6} \le \vartheta \le \frac{\pi}{3}$$

Lo jacobiano del cambio di variabili è dato da $J = \rho$.

Risulta

$$\iint_D (x^2+y^2)^2 \, dx\, dy = \int_0^2 \left(\int_{\pi/6}^{\pi/3} \rho \cdot \rho^4 \, d\vartheta \right) d\rho =$$

$$= \int_0^2 \rho^5 \, d\rho \int_{\pi/6}^{\pi/3} d\vartheta = \frac{\pi}{6} \quad \frac{1}{6} \rho^6 \Big|_{\rho=0}^{\rho=2} = \frac{2^6}{36} \pi = \frac{64}{36} \pi$$

Analisi Matematica 2 (seconda parte) — Prof. B. Rubino
Ingegneria Edile–Architettura A.A. 2001/02

Cognome e nome:____________________________ Tempo: 90 minuti

Matricola:____________________ *L'Aquila, 25 febbraio 2002*

Esercizio A

Studiare il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = e^{y-\cos t}\sin t \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Esercizio B

Studiare la convergenza puntuale e uniforme per la serie di potenze ($z \in \mathbb{C}$)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\sqrt[n]{n} - \cos\left(\sqrt[n]{n}\right)\right]^n z^n$$

Esercizio C

Verificare il teorema di Stokes per il campo vettoriale

$$F(x,y,z) = \left(x^2 + y,\ x - z,\ y^2 - x\right)$$

e la regione

$$\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2 + y^2 \leq 1,\ z = 0\right\}.$$

ANALISI MATEMATICA 2 (seconda parte) — L'Aquila, 25.2.02
INGEGNERIA Edile-Architettura — A.A. 2001-02

ESERCIZIO A

L'equazione di tale problema di Cauchy è del 1° ordine a variabili separabili. Si ha

$$e^{-y}y' = \operatorname{sen} t \, e^{-\cos t}$$

da cui

$$\int_0^t y'(s) e^{-y(s)} ds = \int_0^t \operatorname{sen} s \, e^{-\cos s} ds,$$

$$\int_1^{y(t)} e^{-w} dw = \int_0^t \operatorname{sen}(s) \, e^{-\cos(s)} ds$$

$$-e^{-w}\Big|_{w=1}^{w=y(t)} = e^{-\cos(s)}\Big|_{s=0}^{s=t}$$

$$-e^{-y(t)} + e^{-1} = e^{-\cos t} - e^{-1}$$

$$e^{-y(t)} = \frac{2}{e} - e^{-\cos t} \qquad (*)$$

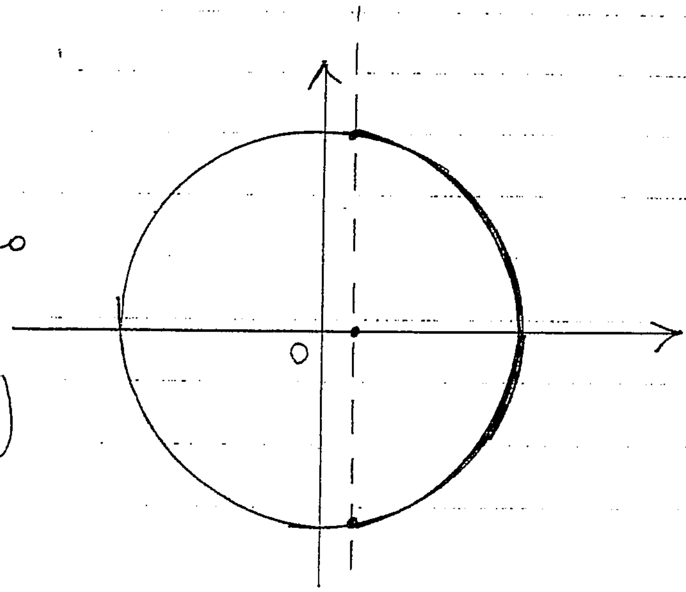
$$\frac{2}{e} - e^{-\cos t} > 0 , \quad e^{\cos t} > \frac{e}{2}$$

$$\cos t > 1 - \log(2)$$

Invertendo la relazione (*) si ha

$$y(t) = -\log\left(\frac{2}{e} - e^{-\cos t}\right)$$

definita per $\cos(t) > 1 - \log 2$ ovvero



per
$$-\arccos(1-\log 2) < t < \arccos(1-\log 2)$$

ESERCIZIO B

Sia

$$a_n = \left[\sqrt[n]{n} - \cos\left(\sqrt[n]{n}\right)\right]^n$$

Per calcolare il raggio di convergenza è opportuno calcolare la radice n-esima di a_n:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} - \cos\sqrt[n]{n} = 1 - \cos 1$$

Perciò

$$r = \frac{1}{1-\cos 1}$$

Per quanto riguarda la convergenza nei punti del bordo si osservi che non si verifica la condizione necessaria: in

$$|z| = \frac{1}{1-\cos 1} \quad \text{risulta}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\sqrt[n]{n} - \cos\sqrt[n]{n}}{1-\cos 1}\right]^n \geq 1$$ visto che nel rapporto

il numeratore è più grande del denominatore.

Si ha perciò

a) convergenza puntuale per $|z| < \dfrac{1}{1-\cos(1)}$

b) convergenza uniforme in ogni dominio D per il quale esiste $\varepsilon > 0$ t.c.

$$D \subset \left\{ z \in \mathbb{C} : |z| < \frac{1}{1-\cos(1)} - \varepsilon \right\}$$

ESERCIZIO C

La regione
$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \le 1,\ z=0\}$$

è un disco di raggio 1. Dobbiamo verificare che
$$\iint_D \langle \operatorname{rot} F, n \rangle \, d\sigma = \oint_{\partial D} F \, ds$$

Risulta
$$\operatorname{rot} F = \det \begin{pmatrix} i & j & k \\ \partial x & \partial y & \partial z \\ x^2+y & x-z & y^2-x \end{pmatrix} = (2y+1, 1, 0)$$

mentre $\underline{n} = (0,0,1)$.

Perciò $\langle \operatorname{rot} F, n \rangle = 0$ e l'integrale a primo membro è nullo.

La parametrizzazione di ∂D è data da
$$\begin{cases} x = \cos\vartheta \\ y = \operatorname{sen}\vartheta \qquad 0 \le \vartheta \le 2\pi \\ z = 0 \end{cases}$$
per cui la circuitazione di F su ∂D è data da
$$\oint_{\partial D} F = \int_0^{2\pi} \left[(\cos^2\vartheta + \operatorname{sen}\vartheta)(-\operatorname{sen}\vartheta) + \cos^2\vartheta \right] d\vartheta$$
$$= -\int_0^{2\pi} \cos^2\vartheta \operatorname{sen}\vartheta \, d\vartheta - \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2\vartheta \, d\vartheta + \int_0^{2\pi} \cos^2\vartheta \, d\vartheta$$
$$= 0 - \pi + \pi = 0$$ e la verifica è completa.

Analisi Matematica 2 (prima parte) — Prof. B. Rubino
Facoltà di Ingegneria A.A. 2001/02

Cognome e nome:______________________________ Tempo: 90 minuti

Matricola:____________________ *L'Aquila, 3 giugno 2002*

Esercizio 1

Trovare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y^{(4)} + 4y = t^3 + e^t$$

Esercizio 2

Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=7}^{\infty} \sin\left(\log\left(1 + \frac{1}{n\log n}\right)\right)$$

Esercizio 3

Calcolare, se ciò ha senso, il massimo e il minimo assoluto della funzione

$$f(x, y, z) = x - y$$

sul dominio

$$\mathcal{D} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\right\}$$

Esercizio 4

Calcolare l'integrale doppio

$$\iint_{\mathcal{D}} x\,(x^2 + y^2)\,dx\,dy,$$

dove

$$\mathcal{D} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 \leq x \leq y,\ x^2 + y^2 \leq 1\right\}$$

ANALISI MATEMATICA 2 (prima parte) – L'Aquila, 3.6.02
INGEGNERIA Edile-Architettura – A. A. 2001-02

ESERCIZIO 1

Si tratta di un'equazione differenziale lineare del quarto ordine a coefficienti costanti non omogenea.
Consideriamo l'omogenea associata:

$$y^{(4)}+4y=0$$

il cui polinomio caratteristico associato è

$$\lambda^4+4=0$$

Sia $\lambda=\rho e^{i\vartheta}$. Allora sostituendo

$$\rho^4 e^{i4\vartheta} = -4 = 4e^{+i\pi}$$

$$\rho=\sqrt{2} \quad e \quad 4\vartheta=\pi+2k\pi, \quad \text{ovvero}$$

$$\vartheta_k=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}, \qquad k=0,1,2,3$$

Quindi

$$\lambda_1=\sqrt{2}\,e^{i\pi/4}, \quad \bar{\lambda}_1=\sqrt{2}\,e^{-i\pi/4}$$

$$\lambda_2=\sqrt{2}\,e^{i\frac{3}{4}\pi}, \quad \bar{\lambda}_2=\sqrt{2}\,e^{-i\frac{3}{4}\pi}$$

e in forma algebrica/trigonometrica

$$\lambda_1=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=1+i, \quad \bar{\lambda}_1=1-i$$

$$\lambda_2=\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-1+i, \quad \bar{\lambda}_2=-1-i$$

L'integrale generale dell'omogenea associata è data da

$$y(t) = (c_1 \cos t + c_2 \operatorname{sen} t) e^{t} + (c_3 \cos t + c_4 \operatorname{sen} t) e^{-t},$$

$c_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3, 4$

Consideriamo ora l'equazione non omogenea

$$y^{(4)} + 4y = t^3 \qquad (*)$$

Poichè $\lambda = 0$ non è soluzione del polinomio caratteristico, cerco una soluzione del tipo

$$\bar{y}(t) = \alpha + \beta t + \gamma t^2 + \delta t^3$$

$$\bar{y}'(t) = \beta + 2\gamma t + 3\delta t^2$$

$$\bar{y}''(t) = 2\gamma + 6\delta t$$

$$\bar{y}'''(t) = 6\delta \quad , \quad \bar{y}^{IV}(t) = 0$$

e sostituendo nell'equazione differenziale $(*)$ si ha

$$4\alpha + 4\beta t + 4\gamma t^2 + 4\delta t^3 = t^3$$

da cui $\alpha = \beta = \gamma = 0$, $4\delta = 1$ ovvero $\delta = \frac{1}{4}$

L'integrale generale di $(*)$ è

$$y(t) = \frac{1}{4} t^3 + e^{t} (c_1 \cos t + c_2 \operatorname{sen} t) + e^{-t} (c_3 \cos t + c_4 \operatorname{sen} t),$$

$c_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3, 4$

onsideriamo inoltre l'equazione non omogenea

$$y^{(4)} + 4y = e^{t} \qquad (**)$$

Poichè $\lambda = 1$ non è soluzione del polinomio caratteristico, cerco una soluzione di $(**)$ del tipo

$$\bar{y}(t) = k\, e^{t}$$

e sostituendo nell'equazione

$$5k\, e^{t} = e^{t}, \quad \text{da cui} \quad k = \frac{1}{5}$$

L'integrale generale di $(**)$ è perciò

$$y(t) = \frac{1}{5} e^{t} + e^{t}\left(c_1 \cos t + c_2 \operatorname{sen} t\right) + e^{-t}\left(c_1 \cos t + c_2 \operatorname{sen} t\right),$$

$$c_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

Tornando perciò al problema proposto, tenendo conto del principio di sovrapposizione e delle soluzioni dei problemi $(*)$ e $(**)$ si ha l'integrale generale

$$y(t) = \frac{1}{4} t^{3} + \frac{1}{5} e^{t} + e^{t}\left(c_1 \cos t + c_2 \operatorname{sen} t\right) + e^{-t}\left(c_1 \cos t + c_2 \cos t\right),$$

$$c_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

ESERCIZIO 2

Si tratta di una serie a termini positivi. E' perciò possibile utilizzare il criterio del confronto asintotico per concludere che

$$\sum_{n=7}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\log\left(1+\frac{1}{n\log n}\right)\right) \simeq \sum_{n=7}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n\log n}\right)$$

$$\simeq \sum_{n=7}^{\infty} \frac{1}{n\log n}$$

dato che in un intorno dell'origine

$$\log(1+x) \simeq x, \quad e \quad \operatorname{sen} x \simeq x.$$

Il comportamento della serie $\sum_{n=7}^{\infty} \frac{1}{n\log n}$

è lo stesso di quello dell'integrale improprio

$$\int_7^{\infty} \frac{1}{x\log x}\,dx = \lim_{M\to\infty}\left(\log(\log(x))\Big|_{x=7}^{x=M}\right) =$$

$$= \lim_{M\to\infty} \log(\log M) - \log\log(7) = +\infty.$$

La serie data perciò diverge a $+\infty$.

ESERCIZIO 3.

Poiché f è continua e D chiuso e limitato, in base al teorema di Weierstrass esistono minimo e massimo assoluto.

Il gradiente di f è dato da

$$\nabla f(x,y,z) = (1,-1,0).$$

Non vi sono perciò punti stazionari all'interno di D.

Per quanto riguarda la frontiera, in base al teorema di Lagrange ∇f deve essere ortogonale a ∂D, fatta eccezione per i punti singolari di ∂D stesso.

D'altra parte ∇f non è ortogonale né ai piani $x=0$, $y=0$ né alla superficie della porzione di sfera.

Si tratta perciò di controllare i bordi.

a) $y=0$, $x \geq 0$, $x^2+z^2=1$ che si parametrizza come

$$\begin{cases} x = \cos\vartheta \\ y = 0 \\ z = \operatorname{sen}\vartheta \end{cases} \qquad -\frac{\pi}{2} < \vartheta < \frac{\pi}{2}$$

$g(\vartheta) = \cos\vartheta - 0 = \cos\vartheta$, da cui

il min. assoluto è 0, il max assoluto è 1.

b) $x=0$, $y \geq 0$, $y^2+z^2=1$ che si parametrizza come

$$\begin{cases} x=0 \\ y=\cos\vartheta \\ z=\operatorname{sen}\vartheta \end{cases} \qquad -\frac{\pi}{2}\leq\vartheta\leq\frac{\pi}{2}$$

$h(\vartheta)=-\cos\vartheta$, da cui

il min. assoluto è -1, il max assoluto è 0.

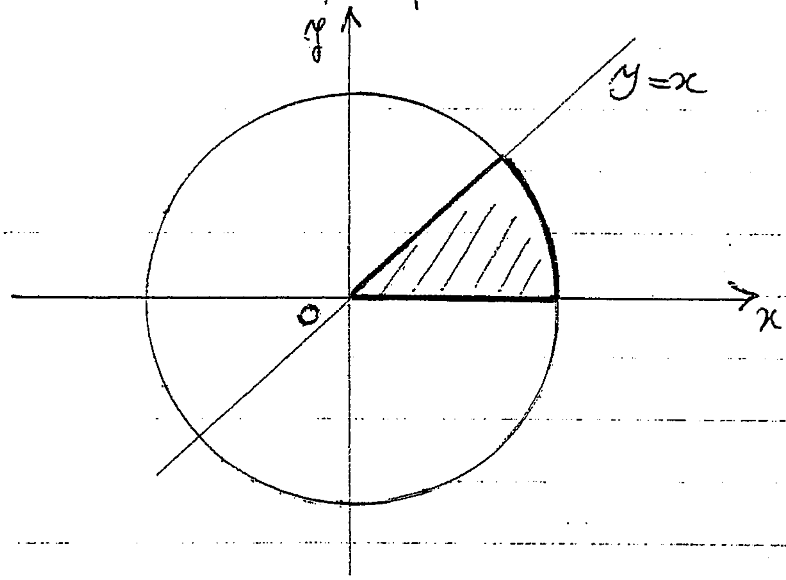
c) $x=0$, $y=0$, $-1\leq z\leq 1$.

Su tale segmento $f(0,0)=0$.

In definitiva il minimo assoluto è -1 e il massimo assoluto $+1$.

ESERCIZIO 4

Rappresentiamo per prima cosa il dominio D.



Il dominio D corrisponde alla parte a tratteggio.
Per calcolare l'integrale, passiamo in coordinate polari

$$\begin{cases} x = \rho\cos\vartheta \\ y = \rho\,\mathrm{sen}\,\vartheta \end{cases} \qquad \begin{array}{l} 0 \le \rho \le 1 \\ 0 \le \vartheta \le \frac{\pi}{4} \end{array} \qquad \text{Lo jacobiano è } J = \rho$$

Perciò

$$\iint_D x\,(x^2+y^2)\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_0^{\pi/4} \rho\cos\vartheta \cdot \rho^2 \cdot \rho \, d\vartheta \right) d\rho =$$

$$= \int_0^1 \rho^4 \, d\rho \int_0^{\pi/4} \cos\vartheta \, d\vartheta = \frac{1}{5} \cdot \mathrm{sen}\,\vartheta \Big|_0^{\pi/4} = \frac{1}{5}\,\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{10}.$$

Analisi Matematica 2 (seconda parte) — Prof. B. Rubino
Facoltà di Ingegneria A.A. 2001/02

Cognome e nome:____________________ Tempo: 90 minuti

Matricola:____________ *L'Aquila, 3 giugno 2002*

Esercizio A

Studiare il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = e^t y \log y \\ y(0) = e. \end{cases}$$

In particolare, dire se la soluzione esiste unica e, in caso affermativo, tracciarne l'andamento approssimativo (dopo averla calcolata).

Esercizio B

Dato il sistema

$$\begin{cases} x + x^3 + \log(1 + y + z) = 0 \\ x + z^3 - \log(1 + y - z) = 0, \end{cases}$$

dire se in un intorno dell'origine è possibile esplicitare due variabili in funzione della terza.

Esercizio C

Verificare il teorema di Gauss per il campo vettoriale

$$F(x, y, z) = (x^2,\ y^2,\ 0)$$

e il dominio

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 1,\ \ x \geq 0,\ \ y \geq 0,\ \ z \geq 0\}.$$

ANALISI MATEMATICA 2 (seconda parte) – L'Aquila, 3.6.02
FACOLTÀ DI INGEGNERIA – A.A. 2001-02

ESERCIZIO 1

Si tratta di un'equazione differenziale a variabili separabili:

$$\frac{y'}{y\log y} = e^t$$

e integrando in $(0,t)$ si ha

$$\int_0^t \frac{y'(s)\,ds}{y(s)\log y(s)} = \int_0^t e^s\,ds$$

Posto $w = y(s)$, si ottiene

$$\int_e^{y(t)} \frac{dw}{w\log w} = \int_0^t e^s\,ds$$

$$\log|\log w|\Big|_e^{y(t)} = e^t - 1$$

$$\log\left(\frac{\log y(t)}{\log e}\right) = e^t - 1$$

Poichè log ha come immagine tutto $\mathbb{R}$, non vi sono condizioni da porre prima di invertire.

$$\frac{\log y(t)}{1} = \exp\left(e^t - 1\right)$$

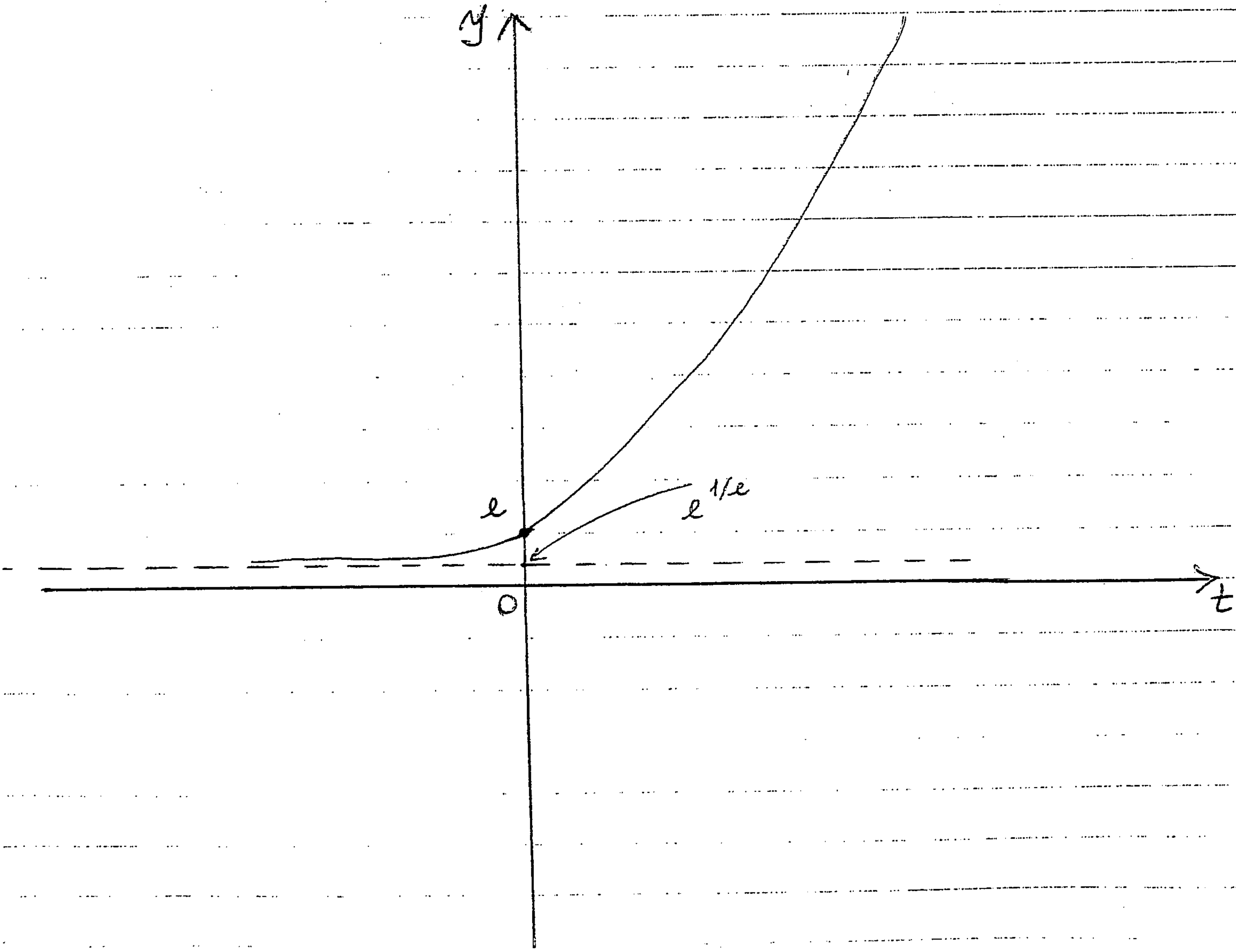
$$y(t) = \exp\left(\exp(e^t - 1)\right)$$

definita e unica su tutta la retta reale.

Poichè $y'(t) > 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$ ed inoltre

$$\lim_{t \to -\infty} y(t) = e^{1/e}, \qquad \lim_{t \to \infty} y(t) = +\infty,$$

un grafico approssimativo è quello riportato qui sotto.
Si osservi che la crescita a $+\infty$ è di tipo esponenziale di esponenziale di esponenziale.



ESERCIZIO B.

Siano

$$f(x,y,z) = x + x^3 + \log(1+y+z)$$

$$g(x,y,z) = x + z^3 - \log(1+y-z)$$

Risulta

$$g(0,0,0) = 0 \;, \quad f(0,0,0) = 0.$$

Si tratta di verificare l'altre ipotesi del teorema delle funzioni implicite, Consideriamo la matrice

$$J = \begin{pmatrix} f_x(0,0,0) & f_y(0,0,0) & f_z(0,0,0) \\ g_x(0,0,0) & g_y(0,0,0) & g_z(0,0,0) \end{pmatrix}$$

Poichè

$$f_x = 1 + 3x^2 \;, \quad g_x = 1$$

$$f_y = \frac{1}{1+y+z} \;, \quad g_y = \frac{-1}{1+y-z}$$

$$f_z = \frac{1}{1+y+z} \;, \quad g_z = 3z^2 + \frac{1}{1+y-z}$$

per cui la matrice J diviene

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Poiché il rango di tale matrice è 2, è possibile esplicitare due variabili in funzione della terza.
In particolare,

a) è possibile esplicitare x e y in funzione di z;

b) è possibile esplicitare y e z in funzione di x.

ESERCIZIO C

Il dominio è dato dal primo ottante di sfera.
Dobbiamo verificare che

$$\iiint_D \operatorname{div} F \, dx\,dy\,dz = \iint_{\partial D} \langle F, n \rangle \, d\sigma$$

Risulta

$$\operatorname{div} F = 2x + 2y$$

Parametrizzando D in coordinate polari si ha

$$\begin{cases} x = \rho \operatorname{sen} \vartheta \cos \varphi \\ y = \rho \operatorname{sen} \vartheta \operatorname{sen} \varphi \\ z = \rho \cos \vartheta \end{cases} \qquad \begin{array}{l} 0 \le \rho \le 1 \\ 0 \le \vartheta \le \pi/2 \\ 0 \le \varphi \le \pi/2 \end{array}$$

Lo jacobiano del cambio di variabili, come è noto è pari a

$$J = \rho^2 \operatorname{sen} \vartheta \geq 0$$

Risulta

$$\iiint_D \operatorname{div} F \, dx\,dy\,dz = \int_0^1 \left(\int_0^{\pi/2} \left(\int_0^{\pi/2} 2\rho \operatorname{sen}\vartheta (\cos\varphi + \operatorname{sen}\varphi) \cdot \right.\right.$$

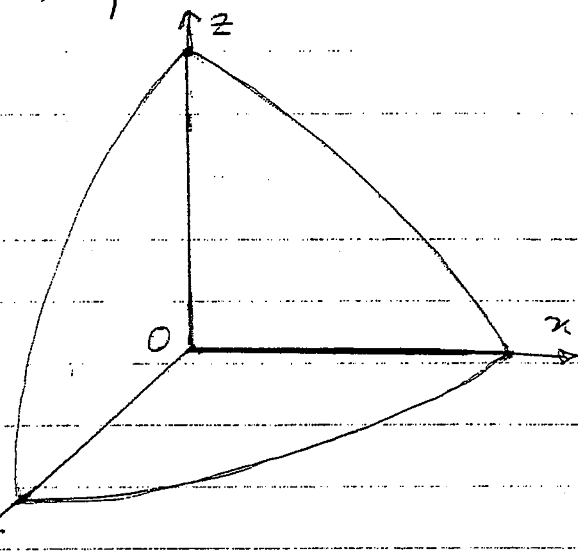
$$\left.\left. \cdot \rho^2 \operatorname{sen} \vartheta \, d\vartheta \right) d\varphi \right) d\rho =$$

$$= \int_0^1 2\rho^3 \, d\rho \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 \vartheta \, d\vartheta \int_0^{\pi/2} (\cos\varphi + \operatorname{sen}\varphi) \, d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \left(\operatorname{sen}\varphi - \cos\varphi \right) \Big|_{\varphi=0}^{\varphi=\pi/2} =$$

$$= \frac{\pi}{8}(1+1) = \frac{\pi}{4}$$

Resta da calcolare il secondo membro, quello relativo al flusso di F uscente da ∂D.



La superficie ∂D va divisa in quattro parti:

a) su $z=0$ risulta

$F_{|z=0} = (x^2, y^2, 0)$

$\underline{n} = (0,0,-1)$

da cui $F \cdot n = 0$ e non dà quindi contributo;

b) su $y=0$ risulta

$F_{|y=0} = (x^2, 0, 0)$

$\underline{n} = (0,-1,0)$

da cui $F \cdot n = 0$ e non dà quindi contributo;

c) su $x=0$ risulta

$F_{|x=0} = (0, y^2, 0)$, $\underline{n} = (-1,0,0)$

da cui $F \cdot n = 0$ e non dà quindi contributo;

1) su $x^2+y^2+z^2=1$ si ha invece $\underline{n} = (x,y,z)$ e

i parametrizzazione in coordinate polari è data da

$$\begin{cases} x = \operatorname{sen}\vartheta \cos\psi & 0 \le \vartheta \le \pi/2 \\ y = \operatorname{sen}\vartheta \operatorname{sen}\psi & \\ z = \cos\vartheta & 0 \le \psi \le \pi/2 \end{cases}$$

Detto $X = (x,y,z)$ si ha

$$X_\vartheta \wedge X_\psi = \det \begin{pmatrix} i & j & k \\ \cos\vartheta\cos\psi & \cos\vartheta \operatorname{sen}\psi & -\operatorname{sen}\vartheta \\ -\operatorname{sen}\vartheta \operatorname{sen}\psi & \operatorname{sen}\vartheta\cos\psi & 0 \end{pmatrix}$$

$$= i(\operatorname{sen}^2\vartheta\cos\psi) - j(-\operatorname{sen}^2\vartheta \operatorname{sen}\psi) + k(\operatorname{sen}\vartheta\cos\vartheta\cos^2\psi$$

$$+ \operatorname{sen}\vartheta\cos\vartheta \operatorname{sen}^2\psi)$$

$$= i \operatorname{sen}^2\vartheta\cos\psi + j \operatorname{sen}^2\vartheta \operatorname{sen}\psi + k \operatorname{sen}\vartheta\cos\vartheta$$

$$|X_\vartheta \wedge X_\psi|^2 = \operatorname{sen}^4\vartheta\cos^2\psi + \operatorname{sen}^4\vartheta \operatorname{sen}^2\psi + \operatorname{sen}^2\vartheta\cos^2\vartheta$$

$$= \operatorname{sen}^4\vartheta + \operatorname{sen}^2\vartheta\cos^2\vartheta = \operatorname{sen}^2\vartheta,$$

da cui $|X_\vartheta \wedge X_\psi| = \operatorname{sen}\vartheta \ge 0$

Perciò

$$\iint_{\partial D} F \cdot \underline{n}\, d\sigma = \int_0^{\pi/2}\left(\int_0^{\pi/2} (\text{sen}^3\vartheta \cos^3\psi + \text{sen}^3\vartheta\, \text{sen}^3\psi)\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\, \text{sen}\,\vartheta \;\, d\vartheta\right) d\psi =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \text{sen}^4\vartheta\, d\vartheta \int_0^{\pi/2} (\text{sen}^3\vartheta + \cos^3\psi)\, d\psi = \frac{\cancel{3}}{\underset{4}{\cancel{16}}}\pi \cdot \frac{\cancel{4}}{\cancel{3}} = \frac{\pi}{4}$$

Risulta infatti

a) $$\int_0^{\pi/2} \text{sen}^4\vartheta\, d\vartheta = \int_0^{\pi/2} (\text{sen}^2\vartheta - \text{sen}^2\vartheta\cos^2\vartheta)\, d\vartheta$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{4}\int_0^{\pi/2} \text{sen}^2(2\vartheta)\, d\vartheta = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{8}\int_0^{\pi} \text{sen}^2\alpha\, d\alpha =$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{8}\,\frac{\pi}{2} = \frac{3}{16}\pi$$

b) $$\int_0^{\pi/2} \text{sen}^3\vartheta\, d\vartheta = \int_0^{\pi/2} (1 - \cos^2\vartheta)\,\text{sen}\,\vartheta\, d\vartheta =$$

$$= -\cos\vartheta\Big|_0^{\pi/2} + \frac{1}{3}\cos^3\vartheta\Big|_0^{\pi/2} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

c) $$\int_0^{\pi/2} \cos^3\vartheta\, d\vartheta = \int_0^{\pi/2} (1 - \text{sen}^2\vartheta)\cos\vartheta\, d\vartheta =$$

$$= \text{sen}\,\vartheta\Big|_0^{\pi/2} - \frac{1}{3}\,\text{sen}^3\vartheta\Big|_0^{\pi/2} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

e la verifica è conclusa.

Facoltà di Ingegneria — Prof. Bruno Rubino
Analisi Matematica 2 (prima parte) A.A. 2001/02

Cognome e nome:____________________________ Tempo: 90 minuti

Matricola:____________________ *L'Aquila, 28 giugno 2002*

Corso di Laurea:________________________________

Esercizio 1

a) Trovare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y''' - 8y'' + 7y' = 0.$$

b) Trovare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y''' - 8y'' + 7y' = 1.$$

c) Trovare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y''' - 8y'' + 7y' = e^t.$$

d) Trovare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y''' - 8y'' + 7y' = e^{4t}.$$

e) Trovare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y''' - 8y'' + 7y' = 2 + e^t + e^{4t}.$$

Esercizio 2

Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tan^2\left(\frac{n+1}{n^2+2}\right)$$

Esercizio 3

Calcolare, se ciò ha senso, il massimo e il minimo assoluto della funzione

$$f(x,y) = x - \sqrt{3}\, y$$

sul dominio

$$\mathcal{D} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; y \geq x, \; x^2 + y^2 \leq 4\right\}.$$

Esercizio 4

Calcolare l'integrale doppio

$$\iint_{\mathcal{D}} (x^2+y^2)^4 \, dx \, dy,$$

dove

$$\mathcal{D} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; y \geq x, \; x^2 + y^2 \leq 4\right\}.$$

ANALISI MATEMATICA 2 — L'AQUILA, 28.6.02
Facoltà di Ingegneria — A.A. 2001-02
(prima parte)

ESERCIZIO 1
Si tratta di equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti del terzo ordine.

a) L'equazione differenziale è omogenea.
Il polinomio caratteristico associato è

$$\lambda^3 - 8\lambda^2 + 7\lambda = 0$$

$$\lambda(\lambda^2 - 8\lambda + 7) = 0$$

$$\lambda(\lambda-1)(\lambda-7) = 0$$

le cui soluzioni sono $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 7$ tutte con molteplicità 1.
L'integrale generale è perciò

$$y(t) = c_1 + c_2 e^t + c_3 e^{7t}, \qquad c_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1,2,3.$$

b) Una soluzione particolare dell'equazione va cercata del tipo
$$\bar{y}(t) = kt$$
visto che $\lambda = 0$ è soluzione del polinomio caratteristico di molteplicità 1.
Sostituendo nell'equazione si ha

$$7K = 1, \text{ da cui } K = \frac{1}{7}$$

L'integrale generale è perciò

$$y(t) = \frac{1}{7}t + c_1 + c_2 e^t + c_3 e^{7t}, \qquad c_i \in \mathbb{R},\ i=1,2,3.$$

c) Una soluzione particolare dell'equazione va cercata del tipo

$$\bar{y}(t) = k t e^t$$

visto che $\lambda = 1$ è soluzione del polinomio caratteristico di molteplicità 1.

Risulta

$$\bar{y}'(t) = k(t+1)e^t, \quad \bar{y}''(t) = k(t+2)e^t, \quad \bar{y}'''(t) = k(t+3)e^t$$

e sostituendo nell'equazione si ha

$$k(t+3)e^t - 8k(t+2)e^t + 7k(t+1)e^t = e^t$$

$$\cancel{kt} + 3k - \cancel{8kt} - 16k + \cancel{7kt} + 7k = 1$$

$$-6k = 1, \quad k = -\frac{1}{6}$$

L'integrale generale è perciò

$$y(t) = -\frac{1}{6}e^t t + c_1 + c_2 e^t + c_3 e^{7t}, \qquad c_i \in \mathbb{R},\ i=1,2,3.$$

d) Una soluzione particolare dell'equazione va cercata del tipo

$\overline{y}(t) = k\, e^{4t}$

visto che $\lambda = 4$ non è soluzione del polinomio caratteristico.
Sostituendo nell'equazione si ha

$$64k\, e^{4t} - 8 \cdot 16k\, e^{4t} + 7 \cdot 4k\, e^{4t} = e^{4t}$$

$$64k - 128k + 28k = 1, \quad 36k = 1, \quad k = \frac{1}{36}$$

L'integrale generale è perciò

$$y(t) = \frac{1}{36} e^{4t} + c_1 + c_2 e^{t} + c_3 e^{7t}, \qquad c_i \in \mathbb{R}, \ i = 1,2,3.$$

e) Tenuto conto di quanto trovato nei punti precedenti ed utilizzando il principio di sovrapposizione si ottiene l'integrale generale

$$y(t) = \frac{1}{7} t - \frac{1}{6} t\, e^{t} + \frac{1}{36} e^{4t} + c_1 + c_2 e^{t} + c_3 e^{7t},$$

$c_i \in \mathbb{R}, \ i = 1,2,3.$

ESERCIZIO 2

Si tratta di una serie a termini positivi.
Possiamo perciò usare il criterio del confronto asintotico.
Poiché in un intorno dell'origine $\operatorname{tg} x \simeq x$,
tenuto conto che

$$\frac{n+1}{n^2+2} \xrightarrow{n\to\infty} 0 \, ,$$ si ha

$$\operatorname{tg}^2\left(\frac{n+1}{n^2+2}\right) \simeq \left(\frac{n+1}{n^2+2}\right)^2 \simeq \frac{1}{n^2}$$

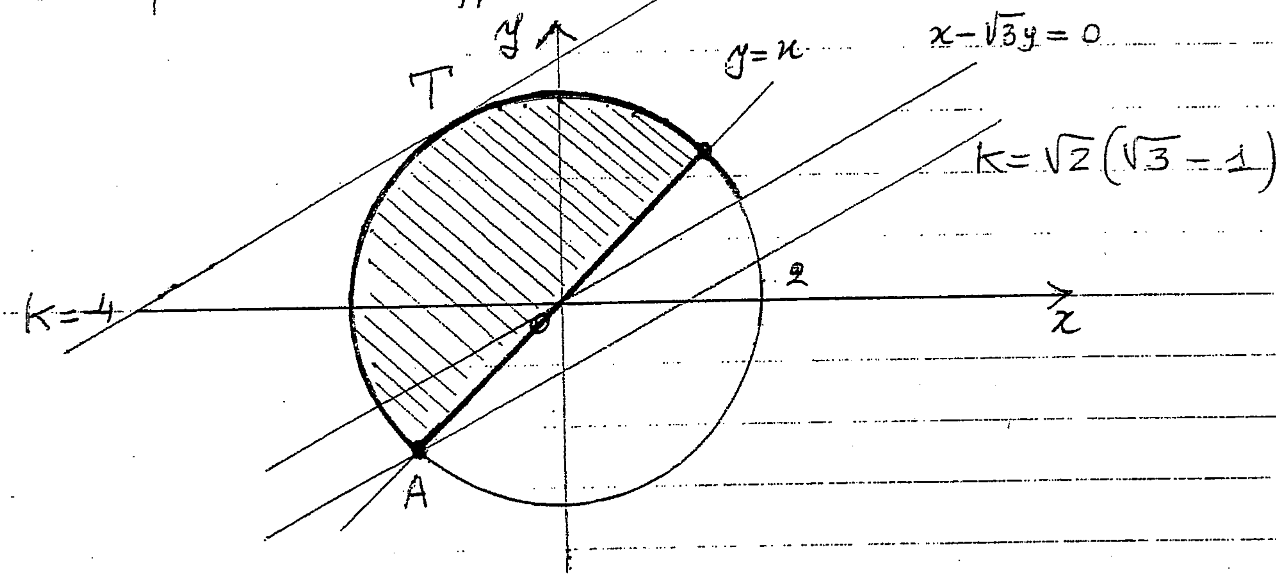
Quindi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg}^2\left(\frac{n+1}{n^2+2}\right) \simeq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

che converge.
La serie data è perciò convergente.

ESERCIZIO 3

La funzione f è continua e il dominio D è chiuso e limitato: per il teorema di Weierstrass esiste minimo e massimo assoluto della funzione f sul dominio D.
Cercheremo tali valori con il metodo delle curve di livello.
Per prima cosa rappresentiamo il dominio D.



Si tratta di trovare la retta della famiglia

$$x - \sqrt{3}\, y = k$$

tangente al dominio nel punto T e passante per il punto $A = (-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$.

i) La retta passante per A corrisponde al valore di

$$K = -\sqrt{2} - \sqrt{3}\,(-\sqrt{2}) = \sqrt{2}\,(\sqrt{3} - 1)$$

ii) Per stabilire le coordinate del punto T consideriamo il sistema

$$\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ x-\sqrt{3}\,y=k \end{cases}$$

$$\begin{cases} (k+\sqrt{3}\,y)^2+y^2=4 \\ x=k+\sqrt{3}\,y \end{cases}$$

$$k^2+2\sqrt{3}\,ky+3y^2+y^2=4$$

$$4y^2+2\sqrt{3}\,ky+k^2-4=0$$

$$\Delta=3k^2-4(k^2-4)=16-k^2$$

Per avere tangenza deve essere $\Delta=0$, da cui $k=\mp 4$.

$$y=-\frac{\sqrt{3}\,k}{4}$$

Poichè ci interessa (vedi figura) il valore di y del punto di tangenza del secondo quadrante, deve essere $y>0$, cioè $k<0$.

Perciò $k=-4$.

Abbiamo perciò minimo assoluto pari a -4 e massimo assoluto pari a $\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)$.

ESERCIZIO 4

Il dominio è lo stesso dell'esercizio precedente.
Passando in coordinate polari si ha

$$\begin{cases} x = \rho\cos\vartheta \\ y = \rho\,\mathrm{sen}\,\vartheta \end{cases} \qquad 0 \le \rho \le 2 \;, \quad \frac{\pi}{4} \le \vartheta \le \frac{5}{4}\pi.$$

e lo jacobiano del cambio di variabile è dato da

$J = \rho$.

Perciò

$$\iint_D (x^2+y^2)^4\,dx\,dy = \int_0^2 \left(\int_{\pi/4}^{\frac{5}{4}\pi} \rho \cdot \rho^8 \, d\vartheta \right) d\rho =$$

$$= \int_0^2 \rho^9 \, d\rho \int_{\pi/4}^{\frac{5}{4}\pi} d\vartheta = \pi \cdot \frac{1}{10}\, 2^{10} = \frac{2^{10}}{10}\pi.$$

Facoltà di Ingegneria — Prof. Bruno Rubino
Analisi Matematica 2 (seconda parte) A.A. 2001/02

Cognome e nome:____________________________ Tempo: 90 minuti

Matricola:____________________ *L'Aquila, 28 giugno 2002*

Corso di Laurea:____________________________

Esercizio A

Studiare i punti critici del sistema dinamico

$$\begin{cases} \dot{x} = \log\left(1 - x + y^2\right) \\ \dot{y} = y \end{cases}$$

Esercizio B

Studiare la convergenza puntuale e uniforme per la serie di potenze ($z \in \mathbb{C}$)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^n}{1+n^2}\, z^n$$

Esercizio C

Sia dato il campo vettoriale

$$F(x,y) = \left(\frac{y^3}{x^2+y^6},\ -\frac{3xy^2}{x^2+y^6} \right)$$

Stabilire *a priori* se è conservativo e, in caso affermativo, calcolarne un potenziale.

ANALISI MATEMATICA 2 (seconda parte) – A.A. 2001/02
Facoltà di Ingegneria – L'Aquila, 28.6.02

ESERCIZIO A.

I punti critici del sistema dinamico sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \log(1-x+y^2) = 0 \\ y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} -x+y^2 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

L'origine è l'unico punto critico

Sia

$$\begin{cases} f(x,y) = \log(1-x+y^2) \\ g(x,y) = y \end{cases}$$

Si ha

$$\begin{pmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{1-x+y^2} & \dfrac{2y}{1-x+y^2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

che valutato nell'origine ci dà

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Poichè gli autovalori sono discordi l'origine è un punto di sella sia per il sistema lineare che per il non lineare.

ESERCIZIO B.

Sia $a_n = \frac{e^n}{1+n^2}$

Per stabilire il raggio di convergenza calcoliamo

$$r = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{e^n}{1+n^2}}{\frac{e^{n+1}}{1+(n+1)^2}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{e} \frac{1+(n+1)^2}{1+n^2} = \frac{1}{e}$$

Proviamo a vedere se c'è convergenza totale su $|z| \leq 1/e$. Si ha

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sup_{|z|\leq 1/e} \left| \frac{e^n}{1+n^2} z^n \right| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^n}{1+n^2} \frac{1}{e^n} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+n^2} \simeq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

che converge.

Perciò abbiamo convergenza totale in $|z| \leq 1/e$ e di conseguenza:

a) convergenza puntuale in $|z| \leq 1/e$

b) convergenza uniforme in ogni regione Ω tale che esiste $\varepsilon > 0$ tale che

$$\Omega \subset \{ z \in \mathbb{C} : |z| \leq \tfrac{1}{e} - \varepsilon \}.$$

ESERCIZIO C

Il campo vettoriale è definito in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, dominio non semplicemente connesso.

Vediamo per prima cosa se F è irrotazionale

Si ha

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{3y^2(x^2+y^6) - y^3 \cdot 6y^5}{(x^2+y^6)^2}$$

$$= \frac{3x^2y^2 + 3y^8 - 6y^8}{(x^2+y^6)^2}$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{-3y^2(x^2+y^6) + 3xy^2 \cdot 2x}{(x^2+y^6)^2}$$

$$= \frac{3x^2y^2 - 3y^8}{(x^2+y^6)^2}$$

Dunque F è irrotazionale.

Per verificare che è conservativo basta calcolare la circuitazione su una curva che circonda l'origine. Per comodità scegliamo la curva

$$x^2 + y^6 = 1$$

$$\gamma \begin{cases} x = \cos\vartheta \\ y = \sqrt[3]{\operatorname{sen}\vartheta} \end{cases} \qquad 0 \le \vartheta \le 2\pi \qquad \begin{cases} \dot{x} = -\operatorname{sen}\vartheta \\ \dot{y} = \dfrac{1}{3}\dfrac{\cos\vartheta}{\sqrt[3]{\operatorname{sen}^2\vartheta}} \end{cases}$$

$$\oint_\gamma F = \int_0^{2\pi} -\operatorname{sen}^2\vartheta - \cancel{3}\cos\vartheta \cancel{\sqrt[3]{\operatorname{sen}^2\vartheta}}\, \frac{1}{\cancel{3}} \frac{\cos\vartheta}{\cancel{\sqrt[3]{\operatorname{sen}^2\vartheta}}}\, d\vartheta$$

$$= \int_0^{2\pi} -\, d\vartheta = -2\pi \neq 0.$$ Il campo non è conservativo.

Facoltà di Ingegneria — Prof. Bruno Rubino
Analisi Matematica 2 (prima parte) A.A. 2001/02

Cognome e nome:________________________ Tempo: 90 minuti

Matricola:__________________ *L'Aquila, 22 luglio 2002*

Corso di Laurea:________________________

**N.B.: gli esercizi vanno svolti <u>tutti</u>
indipendentemente dal proprio corso di laurea**

Esercizio 1

a) Trovare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y^{(4)} + 8y'' + 16y = 0.$$

b) Trovare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y^{(4)} + 8y'' + 16y = \sin(2t).$$

c) Trovare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y^{(4)} + 8y'' + 16y = t\cos(2t).$$

d) Trovare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y^{(4)} + 8y'' + 16y = 3\sin(2t) - 4t\cos(2t).$$

Esercizio 2

Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{\log(1+\sqrt{n})}\right)$$

Esercizio 3

Calcolare, se ciò ha senso, il massimo e il minimo assoluto della funzione

$$f(x,y) = \max\{2x,\ y^2\}$$

sul dominio

$$\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Esercizio 4

Calcolare l'integrale doppio

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\,dx\,dy,$$

dove

$$f(x,y) = \max\{x,\ y^2\}$$

e

$$\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 + y^2 \leq 1,\ y \geq 0\}.$$

ANALISI MATEMATICA 2 (prima parte) — A. A. 2001-02
Facoltà di Ingegneria — L'Aquila, 22.7.02

ESERCIZIO 1
Si tratta di un'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti del quarto ordine.

a) L'equazione è in tal caso omogenea. Il polinomio caratteristico associato è dato da

$$\lambda^4+8\lambda^2+16=0, \quad (\lambda^2+4)^2=0$$

$\lambda=\mp 2i$ con molteplicità 2.

L'integrale generale è dato perciò da

$$y(t)=c_1 \operatorname{sen}(2t)+c_2 t \operatorname{sen}(2t)+c_3\cos(2t)+c_4 t\cos(2t),$$

$$c_i\in\mathbb{R}, \quad i=1,2,3,4.$$

c) Poiché $\lambda=\mp 2i$ hanno molteplicità 2, cerco una soluzione particolare del tipo

$$\bar{y}(t)=(\alpha t^2+\beta t^3)\operatorname{sen}(2t)+(\gamma t^2+\delta t^3)\cos(2t)$$

da cui

$$\bar{y}'(t)=(2\alpha t+3\beta t^2-2\gamma t^2-2\delta t^3)\operatorname{sen}(2t)$$

$$+(2\alpha t^2+2\beta t^3+2\gamma t+3\delta t^2)\cos(2t)$$

$$\bar{y}''(t) = \Big(2\alpha + 6\beta t - 4\gamma t - 6\delta t^2 - 4\alpha t^2 - 4\beta t^3$$

$$- 4\gamma t - 6\delta t^2\Big)\,\mathrm{sen}(2t) + \Big(4\alpha t + 6\beta t^2 - 4\gamma t^2 - 4\delta t^3 +$$

$$+ 4\alpha t + 6\beta t^2 + 2\gamma + 6\delta t\Big)\cos(2t)$$

$$\bar{y}'''(t) = \mathrm{sen}(2t)\Big(6\beta - 8\gamma - 24\delta t - 8\alpha t - 12\beta t^2 +$$

$$- 8\alpha t - 12\beta t^2 + 8\gamma t^2 + 8\delta t^3 - 8\alpha t - 12\beta t^2 - 4\gamma +$$

$$- 12\delta t\Big) + \cos(2t)\Big(8\alpha + 24\beta t + 6\delta - 8\gamma t - 12\delta t^2 +$$

$$+ 4\alpha + 12\beta t - 8\gamma t - 12\delta t^2 - 8\alpha t^2 - 8\beta t^3 - 8\gamma t +$$

$$- 12\delta t^2\Big) =$$

$$= \mathrm{sen}(2t)\Big(6\beta - 12\gamma - 36\delta t - 24\alpha t - 36\beta t^2 + 8\gamma t^2 +$$

$$+ 8\delta t^3\Big) + \cos(2t)\Big(12\alpha + 6\delta + 36\beta t - 24\gamma t - 36\delta t^2 +$$

$$- 8\alpha t^2 - 8\beta t^3\Big)$$

$$\bar{y}^{IV}(t) = \mathrm{sen}(2t)\Big(-36\delta - 24\alpha - 72\beta t + 16\gamma t + 24\delta t^2$$

$$- 24\alpha - 12\delta - 72\beta t + 48\gamma t + 72\delta t^2 + 16\alpha t^2 +$$

$$+ 16\beta t^3\Big) + \cos(2t)\Big(36\beta - 24\gamma - 72\delta t - 16\alpha t - 24\beta t^2 +$$

$$+ 12\beta - 24\gamma - 72\delta t - 48\alpha t - 72\beta t^2 + 16\gamma t + 16\delta t^3\Big)$$

e sostituendo nell'equazione si ha

$$\begin{cases} -36\delta - 24\alpha - 72\beta t + 16\gamma t + 24\delta t^2 - 24\alpha - 12\delta + \\ - 72\beta t + 48\gamma t + 72\delta t^2 + 16\alpha t^2 + 16\beta t^3 + \\ + 8\left(2\alpha + 6\beta t - 4\gamma t - 6\delta t^2 - 4\alpha t^2 - 4\beta t^3 - 4\gamma t - 6\delta t^2\right) \\ + 16\left(\alpha t^2 + \beta t^3\right) = 0 \\ 36\beta - 24\gamma - 72\delta t - 16\alpha t - 24\beta t^2 + 12\beta - 24\gamma + \\ - 72\delta t - 48\alpha t - 72\beta t^2 + 16\gamma t + 16\delta t^3 + \\ + 8\left(4\alpha t + 6\beta t^2 - 4\gamma t^2 - 4\delta t^3 + 4\alpha t + 6\beta t^2 + 2\gamma + 6\delta t\right) + \\ + 16\left(\gamma t^2 + \delta t^3\right) = t \end{cases}$$

da cui

$$-36\delta - 24\alpha - 24\alpha - 12\delta + 16\alpha = 0$$

$$-72\beta + \cancel{16\gamma} - 72\beta + \cancel{48\gamma} + 48\beta - \cancel{32\gamma} - \cancel{32\gamma} = 0$$

$$\cancel{24\delta} + \cancel{72\delta} + \cancel{16\alpha} - \cancel{48\delta} - \cancel{32\alpha} - \cancel{48\delta} + \cancel{16\alpha} = 0$$

$$\cancel{16\beta} - \cancel{32\beta} + \cancel{16\beta} = 0$$

$$36\beta - 24\gamma + 12\beta - 24\gamma + 16\gamma = 0$$

$$-72\delta - \cancel{16\alpha} - 72\delta - \cancel{48\alpha} + 16\gamma + \cancel{32\alpha} + \cancel{32\alpha} + 48\delta = 1$$

$$-\cancel{24\beta} - \cancel{72\beta} + \cancel{48\beta} - 32\gamma + \cancel{48\beta} + 16\gamma = 0$$

$$\cancel{16\delta} - \cancel{32\delta} + \cancel{16\delta} = 0$$

Eliminando le ovvie identità:

$$\begin{cases} +48\delta + 32\alpha = 0 \\ -96\beta = 0 \\ 48\beta - 32\gamma = 0 \\ -96\delta + 16\gamma = 1 \\ -16\gamma = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \beta = 0 \\ \gamma = 0 \\ -96\delta = 1 \\ 48\delta + 32\alpha = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \delta = -\frac{1}{96} \\ -\frac{1}{2} + 32\alpha = 0 \\ \beta = 0,\ \gamma = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha = +\frac{1}{64} \\ \beta = 0,\ \gamma = 0 \\ \delta = -\frac{1}{96} \end{cases}$$

L'integrale generale è dato quindi da

$$y(t) = \frac{1}{64} t^2 \operatorname{sen}(2t) - \frac{1}{96} t^3 \cos(2t) +$$
$$+ (c_1 + c_2 t) \operatorname{sen}(2t) + (c_3 + c_4 t) \cos(2t),$$
$$c_i \in \mathbb{R},\quad i = 1, 2, 3, 4$$

b) Utilizzando i conti sviluppati nel caso (c)

si ottiene il sistema seguente (dove si è semplificato

per tener conto che adesso $\beta = \delta = 0$)

$$\begin{cases} -24\alpha - 24\alpha + 16\alpha = 1 \\ -24\gamma - 24\gamma + 16\gamma = 0 \\ 16\gamma = 0 \\ -32\gamma + 16\gamma = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \gamma = 0 \\ -32\alpha = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha = -\dfrac{1}{32} \\ \gamma = 0 \end{cases}$$

da cui l'integrale generale è in tal caso

$$y(t) = -\frac{t^2}{32}\,\text{sen}(2t) + (c_1 + c_2 t)\,\text{sen}(2t) +$$
$$+ (c_3 + c_4 t)\cos(2t), \qquad c_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

d) Usando quanto trovato nei casi precedenti ed il principio di sovrapposizione si ottiene l'integrale generale

$$y(t) = -\frac{3}{32}t^2\,\text{sen}(2t) - \frac{1}{16}t^2\,\text{sen}(2t) + \frac{1}{24}t^3\cos(2t)$$
$$+ (c_1 + c_2 t)\,\text{sen}(2t) + (c_3 + c_4 t)\cos(2t),$$

$c_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1, 2, 3, 4.$

ESERCIZIO 2

Si tratta di una serie a termini positivi.

Detta

$$a_n = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{\log(1+\sqrt{n})}\right),$$

risulta verificata la condizione necessaria di convergenza visto che

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Applicando il criterio del confronto asintotico si ha

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{\log(1+\sqrt{n})}\right) \simeq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\log(1+\sqrt{n})} >$$

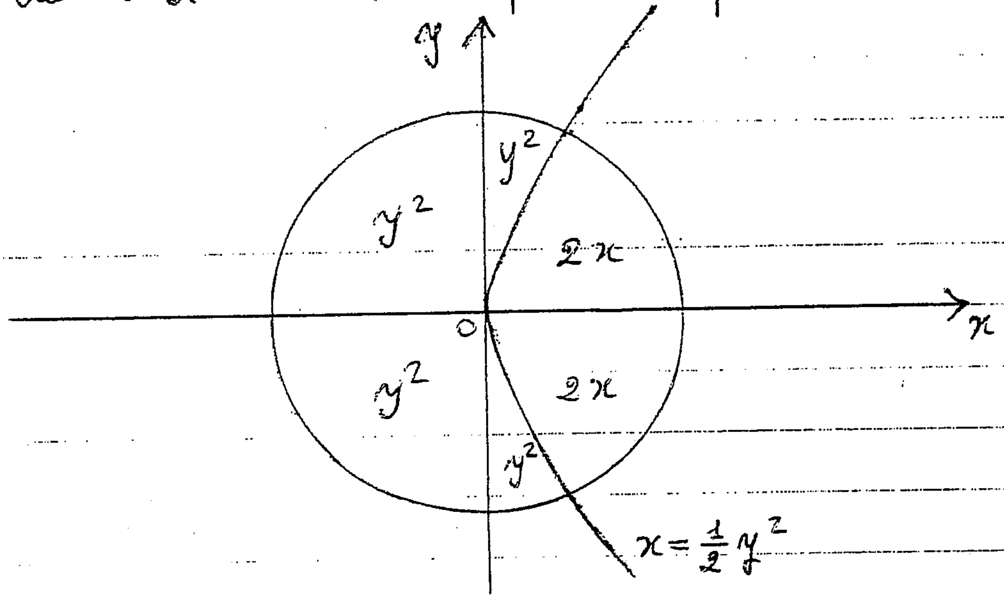
$$> \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \quad \text{che diverge.}$$

Per confronto risulta perciò divergente anche la serie di partenza.

ESERCIZIO 3

Come massimo tra due funzioni continue la funzione f è continua. Il dominio D è chiuso e limitato. Per il teorema di Weierstrass f ammette massimo e minimo assoluti su D.

Rappresentiamo il dominio D e riportiamo su tale dominio il valore assunto dalla funzione f.



Lungo la parabola $x = \frac{1}{2} y^2$ si ha ovviamente $2x = y^2$.

Tale curva divide il dominio D in due zone (come riportato in figura) in una delle quali f vale $2x$ mentre nell'altra y^2.

Chiamiamo D_1 la regione in cui f vale $2x$,

D_2 la regione in cui f vale y^2.

Si ha ovviamente (basta osservare la figura!):

a) su D_1 il minimo è 0 assunto nell'origine, mentre il massimo è 2 assunto in $A = (1, 0)$;

b) su D_2 il minimo è 0 assunto sul segmento

$$S = \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 0\},$$

mentre il massimo è 1 assunto nei punti
$B = (0,1)$ e $C = (0,-1)$.

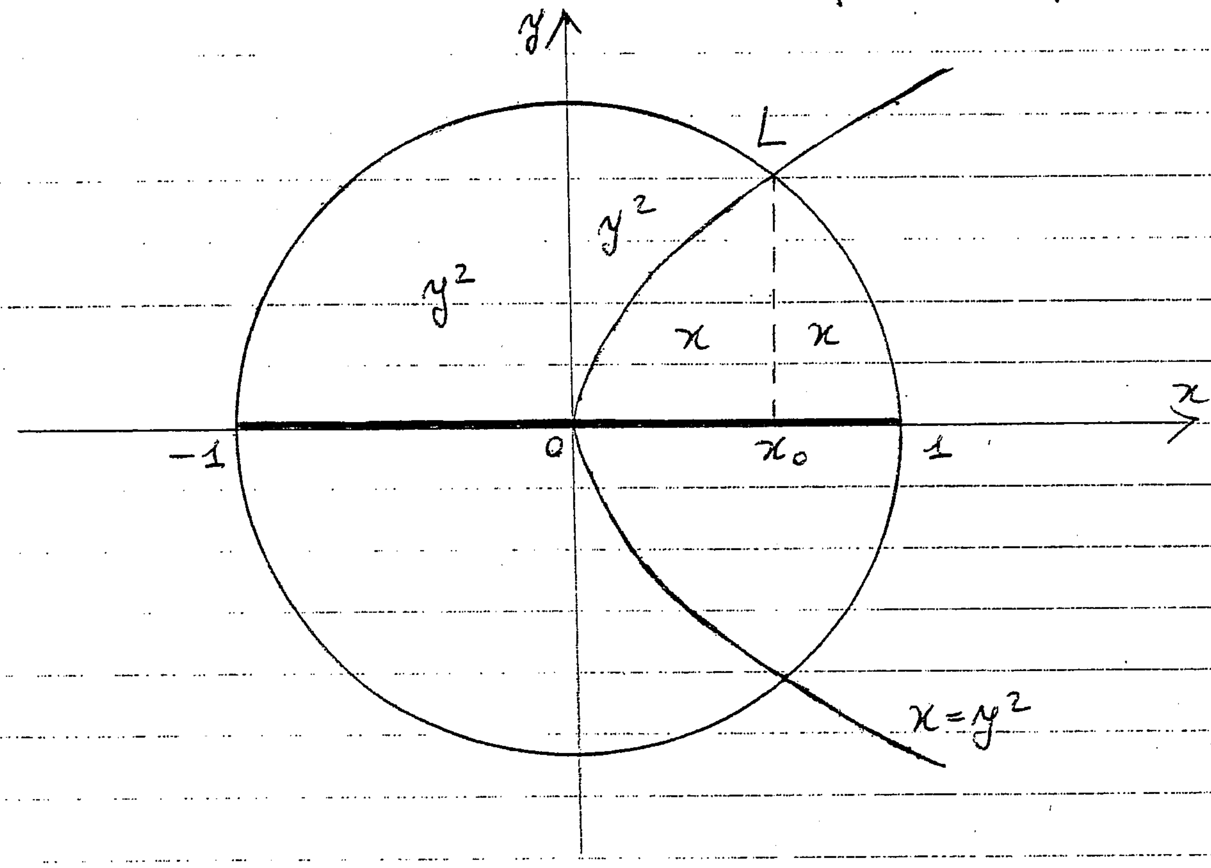
In conclusione per il dominio D

a) il minimo assoluto della funzione f è assunto sul segmento S e vale 0;

b) il massimo assoluto della funzione f è assunto nel punto A e vale 2.

ESERCIZIO 4

Come massimo tra due funzioni continue la funzione f è continua. Il dominio D è chiuso e limitato. L'integrale è perciò ben definito.
Rappresentiamo il dominio D e riportiamo su tale dominio il valore assunto dalla funzione f.



Le coordinate del punto L si trovano come soluzione di

$$\begin{cases} y>0,\ x>0 \\ x^2+y^2=1 \\ x=y^2 \end{cases} \qquad \begin{aligned} &x^2+x-1=0 \\ &x=\frac{-1\mp\sqrt{1+4}}{2}=\frac{-1\mp\sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x_0=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \\ y_0=\sqrt{\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}} \end{cases}$$

Abbiamo perciò

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_{-1}^{0}\left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} y^2\,dy\right)dx +$$

$$+\int_0^{x_0}\left(\int_{\sqrt{x}}^{\sqrt{1-x^2}} y^2\,dy\right)dx + \int_{x_0}^{1}\left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} x\,dy\right)dx +$$

$$+\int_0^{x_0}\left(\int_0^{\sqrt{x}} x\,dy\right)dx =$$

$$= \int_{-1}^{0}\frac{1}{3}\sqrt{(1-x^2)^3}\,dx + \int_0^{x_0}\frac{1}{3}\left(\sqrt{(1-x^2)^3} - x\sqrt{x}\right)dx$$

$$+\int_{x_0}^{1} x\sqrt{1-x^2}\,dx + \int_0^{x_0} x\sqrt{x}\,dx =$$

$$= \int_{-1}^{x_0}\frac{1}{3}\sqrt{(1-x^2)^3}\,dx + \int_{x_0}^{1} x\sqrt{1-x^2}\,dx + \int_0^{x_0}\frac{2}{3}x\sqrt{x}\,dx$$

e per completare l'esercizio non resta che calcolare i vari integrali

N.B.: mentre il terzo integrale è immediato, per i primi due può essere opportuno utilizzare il cambio di variabili $x = \cos\alpha$.

Facoltà di Ingegneria — Prof. Bruno Rubino
Analisi Matematica 2 (seconda parte) A.A. 2001/02

Cognome e nome:______________________ Tempo: 90 minuti

Matricola:______________________ *L'Aquila, 22 luglio 2002*

Corso di Laurea:______________________

N.B.: gli esercizi vanno svolti <u>tutti</u> indipendentemente dal proprio corso di laurea

Esercizio A

Studiare i punti critici del sistema dinamico

$$\begin{cases} \dot{x} = y - x^2 \\ \dot{y} = x - 5y^2 \end{cases}$$

Esercizio B

Studiare la convergenza puntuale e uniforme per la serie di potenze ($z \in \mathbb{C}$)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{\log(1+\sqrt{n})}\right) z^n$$

Esercizio C

Verificare il teorema di Stokes per la regione (la scelta dell'orientazione è libera)

$$\mathcal{S} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4,\ z = x^2 + y^2\right\},$$

e il campo vettoriale

$$F(x, y, z) = (x + y - z, -x + y + z, x - y + z).$$

ANALISI MATEMATICA 2 (seconda parte) - L'Aquila, 22.7.02
Facoltà di Ingegneria - A.A. 2001/02

ESERCIZIO A

Per determinare i punti critici del sistema dinamico consideriamo il sistema

$$\begin{cases} y - x^2 = 0 \\ x - 5y^2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 5x^4 \\ y = x^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt[3]{5}} \\ y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{25}} \end{cases}$$

Abbiamo perciò due punti critici.
Sia ora

$$\begin{cases} f(x,y) = y - x^2 \\ g(x,y) = x - 5y^2 \end{cases}$$

Allora

$$J = \begin{pmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x & 1 \\ 1 & -10y \end{pmatrix}$$

Risulta

$$J(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

il cui determinante è negativo. Perciò l'origine è un punto di sella sia per il lineare associato che per il sistema non lineare di partenza.
Si ha poi

$$J\left(\frac{1}{\sqrt[3]{5}}, \frac{1}{\sqrt[3]{25}}\right) = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt[3]{5}} & 1 \\ 1 & -\frac{10}{\sqrt[3]{25}} \end{pmatrix}$$

il cui determinante è

$$\frac{20}{5} - 1 = 3 > 0$$

Visto che la traccia è negativa, i due autovalori sono negativi. Perciò il punto

$$\left(\frac{1}{\sqrt[3]{5}}, \frac{1}{\sqrt[3]{25}}\right)$$

è un nodo attrattivo.

ESERCIZIO B

Sia

$$a_n = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{\log(1+\sqrt{n})}\right)$$

Per determinare il raggio di convergenza calcoliamo

$$r = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{\log(1+\sqrt{n})}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{\log(1+\sqrt{n+1})}\right)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\log(1+\sqrt{n+1})}{\log(1+\sqrt{n})} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\log\sqrt{n} + \log\left(\sqrt{1+1/n} + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\log\sqrt{n} + \log\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)} = 1$$

Proviamo a vedere se c'è convergenza sui punti del bordo del cerchio di convergenza $|z| = 1$.
Poichè la successione a_n è monotona decrescente a zero c'è convergenza su

$$\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1, \ z \neq 1\}$$

(in base al criterio di Abel-Dirichlet)
In $z=1$ la serie diviene

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ che diverge (come già stabilito nell'esercizio 2 della prima parte)

Abbiamo perciò

a) Convergenza puntuale su

$$\{ z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1, \ z \neq 1 \}$$

b) Convergenza uniforme su ogni regione Ω tale che esiste $\varepsilon > 0$ per cui

$$\Omega \subseteq \{ z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1, \ |z-1| > \varepsilon \}$$

ESERCIZIO C

La regione S è la superficie del paraboloide

$$z = x^2 + y^2$$

che si trova all'interno della sfera di raggio 2 centrata nell'origine.

Risulta

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ z = x^2 + y^2 \geq 0 \end{cases}$$

$$z^2 + z - 4 = 0 \qquad z = \frac{-1 \mp \sqrt{1 + 16}}{2}$$

e l'unica radice accettabile (non negativa) è

$$z_0 = \frac{\sqrt{17} - 1}{2}$$

Parametrizziamo la superficie S

$$\begin{cases} x = \rho \cos \vartheta & 0 \leq \rho \leq \sqrt{z_0} \\ y = \rho \,\text{sen}\, \vartheta \\ z = \rho^2 & 0 \leq \vartheta \leq 2\pi \end{cases}$$

e la sua frontiera ∂S (una circonferenza)

$$\begin{cases} x = \sqrt{z_0} \cos \vartheta \\ y = \sqrt{z_0} \,\text{sen}\, \vartheta & 0 \leq \vartheta \leq 2\pi \\ z = z_0 \end{cases}$$

Verificare il teorema di Stokes equivale a

$$\iint_S \langle \text{rot}\, F, n \rangle \, d\sigma = \oint_{\partial S} F \, ds$$

Risulta

$$\text{rot}\, F = \det \begin{pmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ x+y-z & -x+y+z & x-y+z \end{pmatrix} =$$

$$= \left(-1-1, -(1+1), -1-1\right) = (-2, -2, -2)$$

Sia $X = (\rho \cos\vartheta, \rho \,\text{sen}\,\vartheta, \rho^2)$. Allora

$$X_\rho \wedge X_\vartheta = \det \begin{pmatrix} i & j & k \\ \cos\vartheta & \text{sen}\,\vartheta & 2\rho \\ -\rho\,\text{sen}\,\vartheta & \rho\cos\vartheta & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \left(-2\rho^2 \cos\vartheta, -2\rho^2 \,\text{sen}\,\vartheta, \rho\right)$$

Allora

$$\iint_S \langle \text{rot}\, F, n \rangle \, d\sigma = \int_0^{\sqrt{z_0}} \left(\int_0^{2\pi} \left(4\rho^2 \cos\vartheta + 4\rho^2 \,\text{sen}\,\vartheta - 2\rho\right) d\vartheta \right) d\rho$$

$$= 2\pi \int_0^{\sqrt{z_0}} -2\rho \, d\rho = -2\pi z_0 =$$

$$= \pi\left(1 - \sqrt{17}\right)$$

D'altra parte

$$\oint_{\partial S} F\, ds = \int_0^{2\pi} \Big[\left(\sqrt{z_0}\cos\vartheta + \sqrt{z_0}\,\mathrm{sen}\,\vartheta - z_0\right)\sqrt{z_0}\left(-\mathrm{sen}\,\vartheta\right)$$

$$+ \left(-\sqrt{z_0}\cos\vartheta + \sqrt{z_0}\,\mathrm{sen}\,\vartheta + z_0\right)\sqrt{z_0}\cos\vartheta \Big]\, d\vartheta =$$

$$= \int_0^{2\pi} \Big(- z_0 \cancel{\mathrm{sen}\,\vartheta\cos\vartheta} - z_0\,\mathrm{sen}^2\vartheta - z_0\sqrt{z_0}\,\mathrm{sen}\,\vartheta +$$

$$- z_0 \cos^2\vartheta + \cancel{z_0\,\mathrm{sen}\,\vartheta\cos\vartheta} + z_0\sqrt{z_0}\cos\vartheta \Big)\, d\vartheta$$

$$= \int_0^{2\pi} - z_0\, d\vartheta = -2\pi z_0 = \pi\left(1 - \sqrt{17}\right)$$

e il teorema di Stokes è verificato.

Facoltà di Ingegneria — Prof. Bruno Rubino
Analisi Matematica 2 (prima parte) A.A. 2001/02

Cognome e nome:________________________ Tempo: 90 minuti

Matricola:__________________ *L'Aquila, 6 settembre 2002*

Corso di Laurea:________________________

N.B.: gli esercizi vanno svolti <u>tutti</u>
indipendentemente dal proprio corso di laurea

Esercizio 1

Studiare il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \min\{1,\ y^2\} \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Esercizio 2

Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - e^{1/n}}{\sqrt{n}}$$

Esercizio 3

Sia data la funzione $f:\ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2 - y^2)\log(x^2 + y^2) & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Dire se f è continua e differenziabile.

Esercizio 4

Calcolare l'integrale doppio

$$\iint_{\mathcal{D}} (x+y)\, dx\, dy,$$

dove

$$\mathcal{D} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 2 \le x^2 + y^2 \le 3,\ x \ge 0,\ y \ge 0\right\}.$$

ANALISI MATEMATICA 2 (prima parte) — L'Aquila, 6.9.02
Facoltà di Ingegneria — A.A. 2001/02

ESERCIZIO 1

La funzione $f(t,y) = \min\{1, y^2\}$ è continua su $\mathbb{R}^2$ e (con derivata) localmente Lipschtziana rispetto ad y. Vale perciò il teorema di Cauchy di esistenza e unicità. Inoltre

$$0 \leq \min\{1, y^2\} \leq 1,$$

ovvero limitata, per cui l'esistenza è globale.

Poichè $y(0)=0$, il problema da risolvere è intanto

$$\begin{cases} y' = y^2 \\ y(0)=0, \ |y(t)| \leq 1 \end{cases}$$

L'equazione è a variabili separabili. L'unica soluzione è

$$y(t) \equiv 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Il problema di Cauchy è completamente studiato.

ESERCIZIO 2

La serie data è a termini strettamente negativi. Per riportarci al caso canonico di serie a termini positivi, studiamo la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{1/n}-1}{\sqrt{n}} \qquad (*)$$

Si ha $$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{e^{1/n}-1}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{n\sqrt{n}}} = 1,$$

per cui la serie si comporta come

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}, \qquad \text{convergente}.$$

La serie di partenza, siccome è pari a

$$-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{1/n}-1}{\sqrt{n}}$$

risulta convergente.

ESERCIZIO 3

L'unico punto in cui bisogna controllare continuità e differenziabilità è l'origine.

Poichè $\lim_{\rho \to 0^+} \rho \log \rho = 0$, si ha

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2 - y^2) \log (x^2+y^2) =$$

passando a coordinate polari

$$\begin{cases} x = \rho \cos\vartheta & \rho \geq 0 \\ y = \rho \operatorname{sen}\vartheta & 0 \leq \vartheta < 2\pi \end{cases}$$

$$= \lim_{\rho \to 0^+} \rho^2 (\cos^2\vartheta - \operatorname{sen}^2\vartheta) \log \rho^2 =$$

$$= (\cos^2\vartheta - \operatorname{sen}^2\vartheta) \lim_{\rho \to 0} 2\rho^2 \log \rho = 0,$$

per cui f è continua.

Proviamo ora a verificare la differenziabilità.
Si ha intanto

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(\varepsilon,0) - f(0,0)}{\varepsilon} =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\varepsilon^{\cancel{2}} \log \varepsilon^2}{\cancel{\varepsilon}} = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(0,\varepsilon) - f(0,0)}{\varepsilon} =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{-\varepsilon^{\cancel{2}} \log \varepsilon^2}{\cancel{\varepsilon}} = 0$$

La f è differenziabile in $(0,0)$ se

$$\lim_{(h,k)\to 0} \frac{f(h,k) - f(0,0) - h f_x(0,0) - k f_y(0,0)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$$

Nel nostro caso tale limite si traduce in

$$\lim_{(h,k)\to 0} \frac{(h^2-k^2)\log(h^2+k^2)}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

e passando a coordinate polari

$$\begin{cases} h = r\cos\alpha & r \geq 0 \\ k = r \operatorname{sen}\alpha & 0 \leq \alpha < 2\pi \end{cases}$$

$$= \lim_{r\to 0^+} \frac{r^{\cancel{2}}(\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha)\log r^2}{\cancel{r}} =$$

$$= 2(\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha)\, r \log r = 0$$

La f è perciò continua e differenziabile su $\mathbb{R}$.

ESERCIZIO 4

Il dominio è dato dal tratto di corona circolare che si trova nel primo quadrante. Possiamo parametrizzarla come

$$\begin{cases} x = \rho \cos\vartheta & \sqrt{2} \le \rho \le \sqrt{3} \\ y = \rho \,\text{sen}\,\vartheta & 0 \le \vartheta \le \pi/2 \end{cases}$$

Lo jacobiano del cambio di variabile è $J = \rho$.

Si ha

$$\iint_D (x+y)\,dx\,dy = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \left(\int_0^{\pi/2} \rho^2 (\cos\vartheta + \text{sen}\,\vartheta)\, d\vartheta \right) d\rho =$$

$$= \frac{1}{3} \rho^3 \Big|_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \left(+ \text{sen}\,\vartheta - \cos\vartheta \right) \Big|_0^{\pi/2} =$$

$$= \frac{1}{3} \left(3\sqrt{3} - 2\sqrt{2} \right) \left(+1 + 1 \right) = \frac{2}{3} \left(3\sqrt{3} - 2\sqrt{2} \right)$$

Facoltà di Ingegneria — Prof. Bruno Rubino
Analisi Matematica 2 (seconda parte) A.A. 2001/02

Cognome e nome:______________________________ Tempo: 90 minuti

Matricola:____________________ *L'Aquila, 6 settembre 2002*

Corso di Laurea:______________________________

N.B.: gli esercizi vanno svolti tutti indipendentemente dal proprio corso di laurea

Esercizio A

Studiare il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \max\{1,\ y^2\} \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Esercizio B

Studiare la convergenza puntuale e uniforme per la serie di potenze ($z \in \mathbb{C}$)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - e^{1/n}}{\sqrt{n}} z^n$$

Esercizio C

Verificare il teorema di Stokes per la regione (la scelta dell'orientazione è libera)

$$\mathcal{S} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \le 16,\ z = x^2 + y^2\right\},$$

e il campo vettoriale

$$F(x, y, z) = (x - y - z, -x + y - z, -x - y + z).$$

ANALISI MATEMATICA 2 (seconda parte) — L'Aquila, 6.9.02
Facoltà di Ingegneria — A.A. 2001/02

ESERCIZIO A

La funzione $f(t,y) = \max\{1, y^2\}$ è continua e con derivata rispetto a y localmente Lipschtziana. Vale perciò il teorema di Cauchy di esistenza e unicità.

Poichè $y(0)=0$, il problema da risolvere è intanto

$$\begin{cases} y' = 1 \\ y(0)=0, \quad |y(t)| \leq 1 \end{cases}$$

la cui soluzione è

$$y(t) = t \quad \text{definita in} \quad |t| \leq 1.$$

Si osservi che la y è dispari visto che

$w(t) = -y(-t)$ è soluzione ogni qual volta $y(t)$ lo è.

Si tratta ora di risolvere il problema

$$\begin{cases} y' = y^2 \\ y(1)=1, \quad y(t) \geq 1, \quad t \geq 1 \end{cases}$$

equazione a variabili separabili

$$\int_1^t \frac{y'(s)}{y^2(s)}\, ds = \int_1^t ds$$

$$-\frac{1}{y(s)}\Bigg|_{s=1}^{s=t} = t-1$$

$$-\frac{1}{y(t)} + 1 = t-1$$

$$\frac{1}{y(t)} = (2-t)$$

$$y(t) = \frac{1}{2-t} \qquad t \neq 2$$

$$\frac{1}{2-t} > 1 \iff 2-t < 1 \iff t > 1$$

Tale soluzione va perciò presa in considerazione nell'intervallo

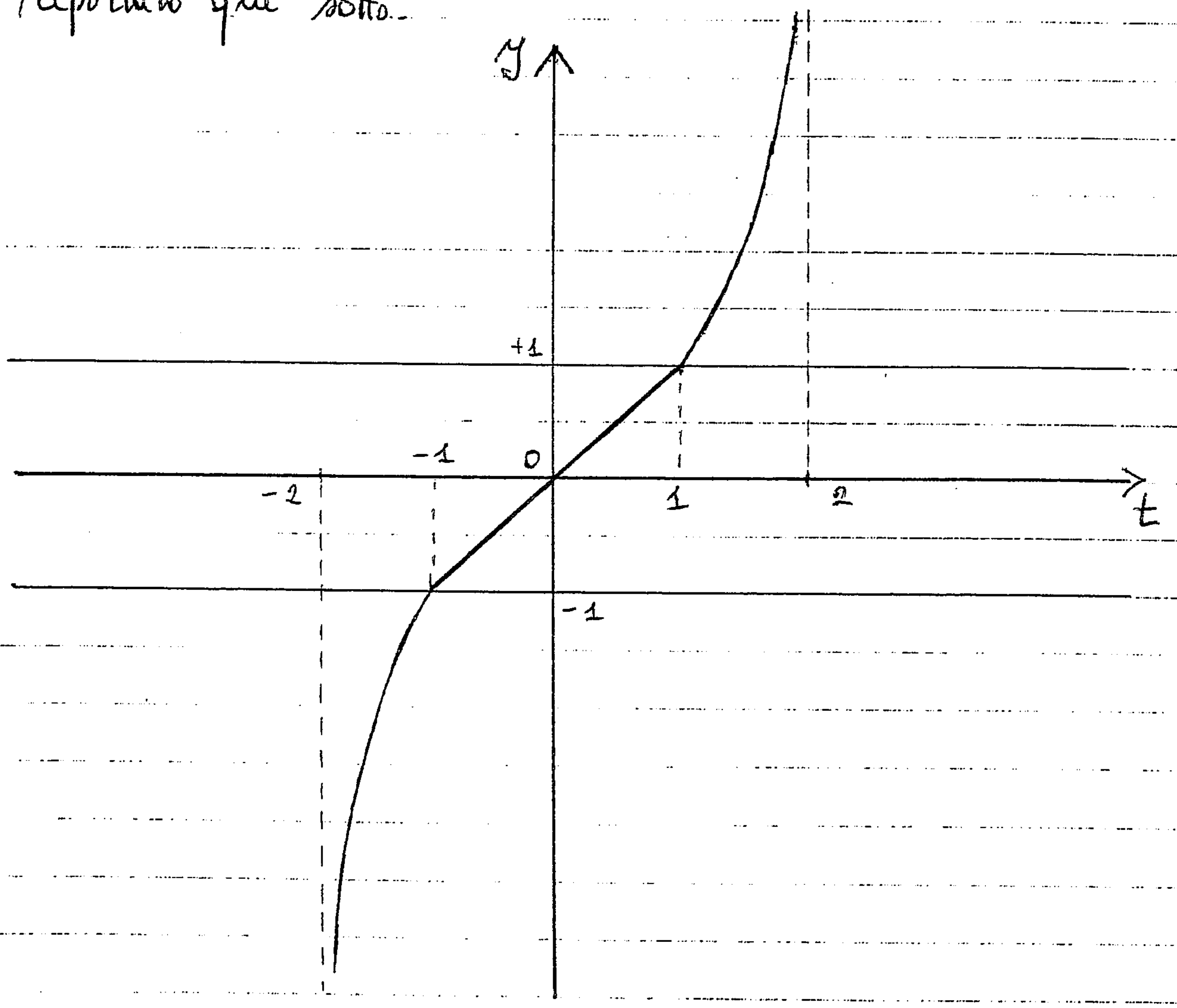
$$1 \le t < 2$$

In $t_0 = 2$ la soluzione esplode (asintoto verticale a $+\infty$).

In definitiva la soluzione del problema di Cauchy (tenendo pure conto del fatto che la soluzione è dispari) è data da

$$y(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2-t} & \text{per } 1<t<2 \\ t & \text{per } -1\leq t\leq 1 \\ -\dfrac{1}{2+t} & \text{per } -2<t<-1 \end{cases}$$

e il relativo grafico approssimativo è quello riportato qui sotto.



ESERCIZIO B

Sia

$$a_n = \frac{e^{1/n} - 1}{\sqrt{n}} > 0 \qquad \forall n$$

Possiamo riscrivere la serie come

$$\sum_{n=1}^{\infty} -a_n z^n$$

Il suo raggio di convergenza è dato da

$$r = \lim_{n\to\infty} \frac{-a_n}{-a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{e^{1/n}-1}{\sqrt{n}}}{\frac{e^{1/n+1}-1}{\sqrt{n+1}}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{e^{1/n}-1}{e^{1/n+1}-1} \; \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} =$$

facendo uso del limite notevole $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$,

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} \; \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} = 1$$

Proviamo a studiare la convergenza totale in $|z| \leq r = 1$. Si ha

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{|z|\leq 1} \left| -a_n z^n \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{1/n}-1}{\sqrt{n}} \simeq$$

utilizzando il confronto asintotico (si veda esercizio 2 della prima parte)

$$\simeq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} \qquad \text{che converge.}$$

Abbiamo perciò convergenza totale su

$$\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$$

e di conseguenza

a) convergenza puntuale $\forall z : |z| \leq 1$;

b) convergenza uniforme su ogni insieme Ω tale che

$$\Omega \subseteq \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}.$$

ESERCIZIO C

La regione S è la superficie del paraboloide

$$z = x^2 + y^2$$

che si trova all'interno della sfera di raggio 4 centrata nell'origine.

Risulta

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 16 \\ z = x^2 + y^2 \geq 0 \end{cases}$$

$$z^2 + z - 16 = 0 \qquad z = \frac{-1 \mp \sqrt{1+64}}{2}$$

e l'unica radice accettabile (non negativa) è

$$z_0 = \frac{\sqrt{65} - 1}{2}$$

Parametrizziamo la superficie S

$$\begin{cases} x = \rho \cos\vartheta \\ y = \rho \operatorname{sen}\vartheta \\ z = \rho^2 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} 0 \leq \rho \leq \sqrt{z_0} \\ 0 \leq \vartheta \leq 2\pi \end{array}$$

e la sua frontiera ∂S (una circonferenza)

$$\begin{cases} x = \sqrt{z_0} \cos\vartheta \\ y = \sqrt{z_0} \operatorname{sen}\vartheta \\ z = z_0 \end{cases} \qquad 0 \leq \vartheta \leq 2\pi$$

Verificare il teorema di Stokes equivale a

$$\iint_S \langle \operatorname{rot} F, n \rangle \, d\sigma = \oint_{\partial S} F \, ds$$

Risulta

$$\operatorname{rot} F = \det \begin{pmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ x-y-z, & -x+y-z, & -x-y+z \end{pmatrix} =$$

$$= \left(-1+1, \; 1-1, \; -1+1 \right) = 0,$$

per cui si tratta di un campo irrotazionale.
Dalla teoria sapremmo in realtà che è allora anche conservativo poiché il campo è definito su tutto $\mathbb{R}^3$ che è semplicemente connesso.
Dovendo però fare una verifica, abbiamo

$$\iint_S \langle \operatorname{rot} F, n \rangle \, d\sigma = 0 \quad \text{poiché } \operatorname{rot} F = 0$$

D'altra parte

$$\oint_{\partial S} F \, ds = \int_0^{2\pi} \Big[\left(\sqrt{z_0} \cos\vartheta - \sqrt{z_0} \operatorname{sen}\vartheta - z_0 \right)\left(-\sqrt{z_0} \operatorname{sen}\vartheta \right)$$

$$+ \left(-\sqrt{z_0} \cos\vartheta + \sqrt{z_0} \operatorname{sen}\vartheta - z_0 \right) \sqrt{z_0} \cos\vartheta \Big] \, d\vartheta =$$

$$= \int_0^{2\pi} \Big(-z_0 \cancel{\operatorname{sen}\vartheta} \cos\vartheta + z_0 \operatorname{sen}^2\vartheta + z_0 \sqrt{z_0} \operatorname{sen}\vartheta +$$

$$- z_0 \cos^2\vartheta + z_0 \cancel{\operatorname{sen}\vartheta} \cos\vartheta - z_0\sqrt{z_0}\cos\vartheta \Big) \, d\vartheta =$$

$$= \int_0^{2\pi} z_0 \left(\operatorname{sen}^2\vartheta - \cos^2\vartheta \right) d\vartheta = 0$$

e la verifica è conclusa.

Facoltà di Ingegneria — Prof. Bruno Rubino
Analisi Matematica 2 (prima parte) A.A. 2001/02

Cognome e nome:______________________________ Tempo: 90 minuti

Matricola:______________________ *L'Aquila, 20 settembre 2002*

Corso di Laurea:______________________________

N.B.: gli esercizi vanno svolti <u>tutti</u> indipendentemente dal proprio corso di laurea

Esercizio 1

Studiare il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y \log\left(\frac{y}{2}\right) \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Esercizio 2

Studiare la convergenza delle seguenti serie

a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n^2} \sin \frac{1}{n^2}$$

b)

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n^2} \sin \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Esercizio 3

Calcolare, se ciò ha senso, il massimo e il minimo assoluto della funzione

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

sul dominio

$$\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ |x| \leq 3, \ |y| \leq 3\} \setminus \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ |x| \leq 2, \ |y| \leq 2\}.$$

N.B.: si ricorda che $a \in A \setminus B$ se e solo se $a \in A$ e $a \notin B$.

Esercizio 4

Calcolare l'integrale doppio

$$\iint_{\mathcal{D}} (x^2 + y^2)\, dx\, dy,$$

dove

$$\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ |x| \leq 3, \ |y| \leq 3\} \setminus \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ |x| \leq 2, \ |y| \leq 2\}.$$

ANALISI MATEMATICA 2 — L'Aquila, 20.9.02
Facoltà di Ingegneria — A.A. 2001/02.
(PRIMA PARTE)

ESERCIZIO 1

Si tratta di un'equazioni differenziale a variabili separabili.

Risulta

$$\int_0^t \frac{y'(s)\, ds}{y(s) \log\left(\frac{y(s)}{2}\right)} = \int_0^t ds$$

$w = y(s)$, da cui

$$\int_1^{y(t)} \frac{dw}{w \log(w/2)} = t$$

$$\frac{1}{2} \log\left|\log\left(\frac{w}{2}\right)\right| \Bigg|_{w=1}^{w=y(t)} = t$$

$$\log\left(\frac{\log\left(\frac{y(t)}{2}\right)}{\log(1/2)}\right) = 2t$$

La funzione log ha immagine tutto $\mathbb{R}$, per cui non vi sono restrizioni prima di invertire

$$\log \frac{y(t)}{2} = -\log(2)\, e^{2t}$$

$$y(t) = 2 \exp\left[\log\left(\tfrac{1}{2}\right) e^{2t}\right] \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

ESERCIZIO 2

Si osservi che n^2 è pari ogni qual volta n è pari. Perciò

$$(-1)^{n^2} = (-1)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Le due serie sono perciò a segno alterno

Inoltre, sia $\operatorname{sen}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ che $\operatorname{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ sono strettamente monotone decrescenti a zero per $n \to +\infty$.

Vale perciò il teorema di Leibnitz e le due serie risultano convergenti.

Si osservi inoltre che, poiché

$\operatorname{sen} x \simeq x$ per x piccolo vicino all'origine, si ha

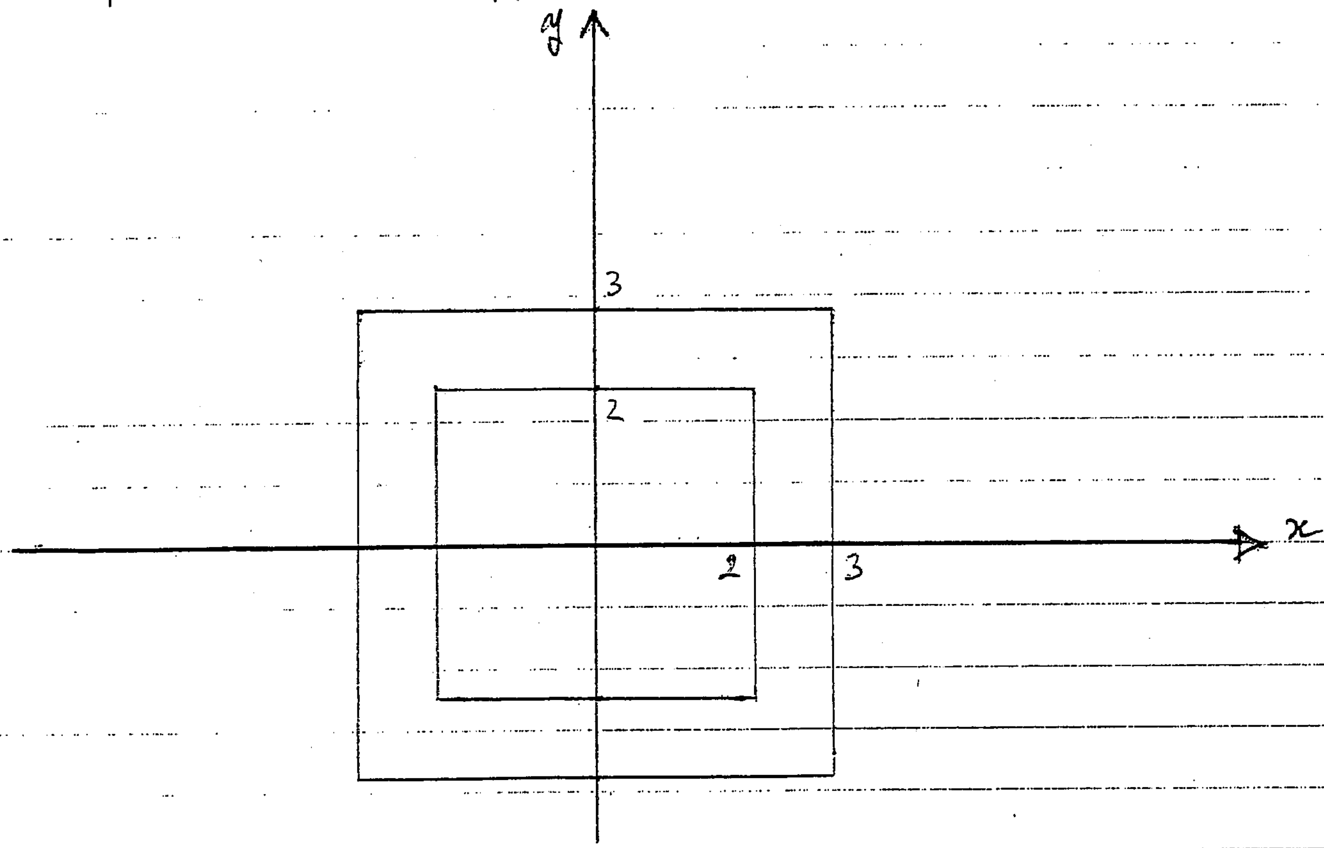
$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen} \frac{1}{n^2} \simeq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \quad \text{convergente}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen} \frac{1}{\sqrt{n}} \simeq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}, \quad \text{divergente.}$$

ovvero la prima serie converge anche assolutamente mentre la seconda no.

ESERCIZIO 3

Per prima cosa rappresentiamo il dominio.



Il dominio D è la regione compresa tra i due quadrati di lato 6 e 4. La ricerca dei punti di massimo e minimo assoluto può facilmente essere fatto con il metodo delle curve di livello: le curve

$x^2+y^2=k>0$ sono circonferenze con centro l'origine: le due situazioni estreme si realizzano quando la circonferenza è tangente internamente al quadrato di lato 4, ossia nel caso della circonferenza di raggio 2 ($k=4$) e quando la circonferenza passa per i vertici del quadrato di lato 6, ovvero per i punti di coordinate $(3,3)$, $(-3,3)$, $(-3,-3)$ e $(3,-3)$, ossia nel caso della circonferenza di raggio $\sqrt{18}$ ($k=18$).

Perciò il minimo assoluto è 4 mentre il massimo assoluto 18.

Si osservi che in alternativa si poteva utilizzare il teorema di Lagrange, calcolare

$\nabla f(x,y) = (2x, 2y)$ e osservare che:

a) tale gradiente non si annulla mai in D;

b) tale gradiente è ortogonale a ∂D solo per $x=0$ o $y=0$. Per questioni di simmetria si trovavano perciò i punti

$A=(0,2)$ e $B=(0,3)$ e gli altri tre

analoghi dove la funzione vale rispettivamente

4 e 9.

c) Esaminare i punti singolari del bordo del dominio: per simmetria ci possiamo limitare ai punti $C=(2,2)$ e $D=(3,3)$ dove la funzione vale rispettivamente 8 e 18.

Confrontando i valori trovati si ottiene nuovamente che il minimo assoluto è 4 e il massimo assoluto 18.

ESERCIZIO 4

Il dominio è ancora quello dell'esercizio precedente.

Detto

$$A = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\le x\le 3,\ 0\le y\le 3\} \setminus$$
$$\setminus \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\le x\le 2,\ 0\le y\le 2\},$$

si ha

$$\iint_D (x^2+y^2)\,dx\,dy = 4\iint_A (x^2+y^2)\,dx\,dy =$$

$$= \int_0^2 \left(\int_2^3 (x^2+y^2)\,dy\right)dx + \int_2^3\left(\int_0^3 (x^2+y^2)\,dy\right)dx$$

$$= \int_0^2 \left(x^2y+\frac{1}{3}y^3\right)\Bigg|_{y=2}^{y=3} dx + \int_2^3 \left(\frac{1}{3}y^3+x^2y\right)\Bigg|_{y=0}^{y=3} dx =$$

$$= \int_0^2 \left(3x^2+9-2x^2-\frac{8}{3}\right)dx + \int_2^3 (9+3x^2)\,dx =$$

$$= \left(\frac{1}{3}x^3+\frac{19}{3}x\right)\Bigg|_{x=0}^{x=2} + \left(9x+x^3\right)\Bigg|_{x=2}^{x=3} =$$

$$= \frac{8}{3}+\frac{38}{3}+27+27-18-8 = \frac{46}{3}+28$$

Facoltà di Ingegneria — Prof. Bruno Rubino
Analisi Matematica 2 (seconda parte) A.A. 2001/02

Cognome e nome:____________________ Tempo: 90 minuti

Matricola:________________ *L'Aquila, 20 settembre 2002*

Corso di Laurea:____________________

N.B.: gli esercizi vanno svolti tutti indipendentemente dal proprio corso di laurea

Esercizio A

Studiare il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y^{(4)} + 10y''' + 35y'' + 50y' + 24y = t, \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \\ y''(0) = 0 \\ y'''(0) = 0. \end{cases}$$

Esercizio B

Studiare la convergenza puntuale e uniforme per la serie di potenze ($z \in \mathbb{C}$)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n^2}\right) z^n$$

Esercizio C

Verificare il teorema di Gauss per il dominio

$$\mathcal{D} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\right\}$$

e il campo vettoriale

$$F(x, y, z) = (x - y - z, -x + y - z, -x - y + z)\,.$$

ANALISI MATEMATICA 2 (seconda parte) - L'Aquila, 20.9.02
Facoltà di Ingegneria - A. A. 2001/02

ESERCIZIO A.
L'equazione differenziale è del quarto ordine lineare a coefficienti costanti non omogenea.

Il polinomio caratteristico associato è dato da

$$\lambda^4 + 10\lambda^3 + 35\lambda^2 + 50\lambda + 24 = 0$$

che si decompone in

$$(\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+3)(\lambda+4) = 0$$

L'integrale generale dell'omogenea associata è perciò

$$y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t} + c_3 e^{-3t} + c_4 e^{-4t},$$

$$c_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

Poichè $\lambda = 0$ non è soluzione del polinomio caratteristico, cerco una soluzione particolare della non omogenea della forma

$\bar{y}(t) = k_1 t + k_2$ e sostituendo

$$50 k_1 + 24 k_1 t + 24 k_2 = t,$$

da cui

$$\begin{cases} 24k_1 = 1 \\ 50k_1 + 24k_2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} k_1 = \frac{1}{24} \\ k_2 = -\frac{1}{24}\,\frac{50}{24} \end{cases}$$

La soluzione generale è perciò data da

$$y(t) = \frac{t}{24} - \frac{50}{(24)^2} + c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t} + c_3 e^{-3t} + c_4 e^{-4t},$$

$c_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1, 2, 3, 4.$

Si tratta ora di imporre le condizioni iniziali. Per fare ciò dobbiamo prima calcolare le varie derivate

$$y'(t) = \frac{1}{24} - c_1 e^{-t} - 2c_2 e^{-2t} - 3c_3 e^{-3t} - 4c_4 e^{-4t}$$

$$y''(t) = c_1 e^{-t} + 4c_2 e^{-2t} + 9c_3 e^{-3t} + 16c_4 e^{-4t}$$

$$y'''(t) = -c_1 e^{-t} - 8c_2 e^{-2t} - 27c_3 e^{-3t} - 64c_4 e^{-4t}$$

Da cui

$$0 = y(0) = -\frac{50}{(24)^2} + c_1 + c_2 + c_3 + c_4$$

$$0 = y'(0) = \frac{1}{24} - c_1 - 2c_2 - 3c_3 - 4c_4$$

$$0 = y''(0) = c_1 + 4c_2 + 9c_3 + 16c_4$$

$$0 = y'''(0) = -c_1 - 8c_2 - 27c_3 - 64c_4$$

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 + c_4 = \dfrac{50}{24^2} \\ c_1 + 2c_2 + 3c_3 + 4c_4 = \dfrac{1}{24} \\ c_1 + 4c_2 + 9c_3 + 16c_4 = 0 \\ c_1 + 8c_2 + 27c_3 + 64c_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4c_2 + 18c_3 + 48c_4 = 0 \\ 2c_2 + 6c_3 + 12c_4 = -\dfrac{1}{24} \\ c_2 + 2c_3 + 3c_4 = \dfrac{1}{24} - \dfrac{50}{24^2} \\ c_1 + c_2 + c_3 + c_4 = \dfrac{50}{24^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6c_3 + 24c_4 = +\dfrac{1}{12} \\ 2c_3 + 6c_4 = -\dfrac{1}{24} - \dfrac{1}{12} + \dfrac{100}{24^2} \\ c_2 = -2c_3 - 3c_4 + \dfrac{1}{24} - \dfrac{50}{24^2} \\ c_1 = -c_2 - c_3 - c_4 + \dfrac{50}{24^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6c_4 = \dfrac{1}{12} + \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{4} - \dfrac{300}{24^2} \\ c_3 = -3c_4 - \dfrac{1}{48} - \dfrac{1}{24} + \dfrac{50}{24^2} \\ c_2 = -2c_3 - 3c_4 + \dfrac{1}{24} - \dfrac{50}{24^2} \\ c_1 = -c_2 - c_3 - c_4 + \dfrac{50}{24^2} \end{cases}$$

Si tratta infine di completare i conti di tale sistema per trovare l'unica soluzione del problema.

ESERCIZIO B

Si tratta di trovare per prima cosa il raggio di convergenza.

Sia $a_n = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Allora

$$r = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{n^2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right)} =$$

tenuto conto del limite notevole $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$,

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{n^2} = 1$$

Proviamo a vedere se c'è convergenza totale per $|z| \leq 1$. Si ha

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{|z|\leq 1} \left| \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n^2}\right) z^n \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n^2}\right) \simeq$$

$$\simeq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$ che converge.

Dunque c'è convergenza totale per $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$

Di conseguenza abbiamo

a) convergenza puntuale $\forall z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1$;

b) convergenza uniforme in ogni regione Ω tale che $\Omega \subseteq \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$.

ESERCIZIO C

Il dominio D è la sfera unitaria centrata nell'origine.

Si ha

$$\operatorname{div} F = 1 + 1 + 1 = 3$$

Abbiamo poi come versore normale alla superficie ∂D il versore $\underline{n} = (x, y, z)$

Dobbiamo verificare che

$$\iiint_D \operatorname{div} F \, dx\,dy\,dz = \iint_{\partial D} \langle F, \underline{n} \rangle \, d\sigma$$

Poiché il volume della sfera di raggio r è data dalla formula (geometria elementare) $\frac{4}{3}\pi r^3$, si ha

$$\iiint_D \operatorname{div} F \, dx\,dy\,dz = \cancel{3} \cdot \frac{4}{\cancel{3}}\pi = 4\pi$$

Resta da calcolare il flusso del campo vettoriale F attraverso la superficie ∂D.

Parametrizzato il bordo come

$$\begin{cases} x = \operatorname{sen}\varphi \cos\vartheta \\ y = \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\vartheta \\ z = \cos\varphi \end{cases} \qquad \begin{array}{l} 0 \leq \varphi < \pi \\ 0 \leq \vartheta < 2\pi \end{array}$$

e detto $X = (x, y, z)$, si ha

$$X_\psi \wedge X_\vartheta = \det\begin{pmatrix} i & j & k \\ \cos\psi\cos\vartheta & \cos\psi\,\text{sen}\,\vartheta & -\text{sen}\,\psi \\ -\text{sen}\,\psi\,\text{sen}\,\vartheta & \text{sen}\,\psi\cos\vartheta & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= (\text{sen}^2\psi\cos\vartheta,\ \text{sen}^2\psi\,\text{sen}\,\vartheta,\ \text{sen}\,\psi\cos\psi)$$

$$|X_\psi \wedge X_\vartheta|^2 = \text{sen}^4\psi(\cos^2\vartheta + \text{sen}^2\vartheta) + \text{sen}^2\psi\cos^2\psi$$
$$= \text{sen}^2\psi$$

da cui

$$|X_\psi \wedge X_\vartheta| = \text{sen}\,\psi \geq 0.$$

Inoltre

$$< F, n > = (x-y-z)x + y(-x+y-z) + z(-x-y+z) =$$

$$= x^2 - xy - xz - xy + y^2 - yz - xz - yz + z^2 =$$

$$= x^2+y^2+z^2 - 2xy - 2xz - 2yz = 1 - 2(xy+xz+yz)$$

Perciò

$$\iint_{\partial D} < F, n > d\sigma = \int_0^\pi \left(\int_0^{2\pi} \text{sen}\,\psi \left[1 - 2\left(\text{sen}^2\psi\cos\vartheta\,\text{sen}\,\vartheta + \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. + \text{sen}\,\psi\cos\psi\cos\vartheta + \text{sen}\,\psi\cos\psi\,\text{sen}\,\vartheta\right)\right] d\vartheta \right) d\psi$$

$$= \int_0^\pi 2\pi\,\text{sen}\,\psi\, d\psi = 4\pi$$

e la verifica è conclusa.

Analisi Matematica 2 (prima parte) — Prof. B. Rubino
Facoltà di Ingegneria A.A. 2001/02

Cognome e nome: ______________________ Tempo: 90 minuti

Matricola: ______________________ *L'Aquila, 16 dicembre 2002*

Esercizio 1

a) Trovare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y''' + 4y' = 0.$$

b) Trovare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y''' + 4y' = t.$$

c) Trovare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y''' + 4y' = \sin(2t).$$

d) Trovare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y''' + 4y' = -t + 2\sin(2t).$$

Esercizio 2

Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tan\left(\frac{n}{n^3+5}\right)$$

Esercizio 3

Calcolare, se ciò ha senso, il massimo e il minimo assoluto della funzione

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - 5$$

sul dominio

$$\mathcal{D} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ |x| \leq 1, \ |y| \leq 2\right\}.$$

Esercizio 4

Calcolare l'integrale doppio

$$\iint_{\mathcal{D}} \left(4x^2 + 9y^2\right) dx\, dy,$$

dove

$$\mathcal{D} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 4x^2 + 9y^2 \leq 1, \ y \geq 0\right\}.$$

ANALISI MATEMATICA 2 (prima parte) – L'Aquila, 16.12.02
Ingegneria Edile-Architettura – A.A. 2001/02

ESERCIZIO 1

Si tratta di un'equazione differenziale lineare del terzo ordine a coefficienti costanti

a) In tal caso l'equazione differenziale è omogenea.
Il polinomio caratteristico associato è

$$\lambda^3+4\lambda=0$$
$$\lambda(\lambda^2+4)=0$$
$$\lambda_1=0, \quad \lambda_2=2i, \quad \overline{\lambda}_2=-2i$$ tutte con molteplicità 1.

L'integrale generale è perciò

$$y(t)=c_1+c_2\,\mathrm{sen}(2t)+c_3\cos(2t)$$

b) Poichè $\lambda=0$ è soluzione del polinomio caratteristico con molteplicità 1, cerco una soluzione particolare del tipo

$$\overline{y}(t)=(k_1t^2+k_2t)$$

Sostituendo nell'equazione si ha

$$4(2k_1t+k_2)=t$$

$$\begin{cases}8k_1=1\\4k_2=0\end{cases}\qquad\begin{cases}k_1=\frac{1}{8}\\k_2=0\end{cases}$$

per cui l'integrale generale è

$$y(t) = \frac{t^2}{8} + c_1 + c_2 \operatorname{sen}(2t) + c_3 \cos(2t), \qquad c_i \in \mathbb{R},\ i=1,2,3.$$

c) Poichè $\lambda = \mp 2i$ sono soluzioni di molteplicità 1, cerco una soluzione particolare del tipo

$$\bar{y}(t) = k_1 t \cos(2t) + k_2 t \operatorname{sen} 2t$$

$$\bar{y}'(t) = k_1 \cos 2t + k_2 \operatorname{sen} 2t - 2k_1 t \operatorname{sen} 2t + 2k_2 t \cos 2t$$

$$= (k_1 + 2k_2 t)\cos(2t) + (k_2 - 2k_1 t)\operatorname{sen}(2t)$$

$$\bar{y}''(t) = \cos(2t)(2k_2 + 2k_2 - 4k_1 t) + \operatorname{sen}(2t)(-2k_1 - 2k_1 - 4k_2 t)$$

$$= (4k_2 - 4k_1 t)\cos(2t) - (4k_1 + 4k_2 t)\operatorname{sen}(2t)$$

$$\bar{y}'''(t) = \cos(2t)(-4k_1 - 8k_1 - 8k_2 t) + \operatorname{sen}(2t)(-4k_2 - 8k_2 + 8k_1 t)$$

e sostituendo nell'equazione si ha

$$(-12k_1 - 8k_2 t)\cos(2t) + (-12k_2 + 8k_1 t)\operatorname{sen}(2t) +$$

$$+ (4k_1 + 8k_2 t)\cos(2t) + (4k_2 - 8k_1 t)\operatorname{sen}(2t) = \operatorname{sen}(2t)$$

da cui

$$\begin{cases} -12k_1 - \cancel{8k_2 t} + 4k_1 + \cancel{8k_2 t} = 0 \\ -12k_2 + \cancel{8k_1 t} + 4k_2 - \cancel{8k_1 t} = 1 \end{cases}$$

e perciò

$$\begin{cases} k_1 = 0 \\ k_2 = -\frac{1}{8} \end{cases}$$

L'integrale generale è perciò

$$y(t) = -\frac{t}{8}\,\text{sen}(2t) + c_1 + c_2\,\text{sen}(2t) + c_3\,\cos(2t),$$

$c_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3$.

d) Tenuto conto di quanto trovato nei punti precedenti e usando il principio di sovrapposizione si ha

$$y(t) = -\frac{t^2}{8} - \frac{t}{4}\,\text{sen}(2t) + c_1 + c_2\,\text{sen}(2t) + c_3\,\cos(2t),$$

$c_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3$.

ESERCIZIO 2

Si tratta di una serie a termini positivi.

Poichè

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^3+5} = 0,$$

tenuto conto che $\operatorname{tg} x \simeq x$ in un intorno dell'origine e applicando il criterio del confronto asintotico risulta

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg}\left(\frac{n}{n^3+5}\right) \simeq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3+5} \simeq$$

applicando ancora il criterio del confronto asintotico

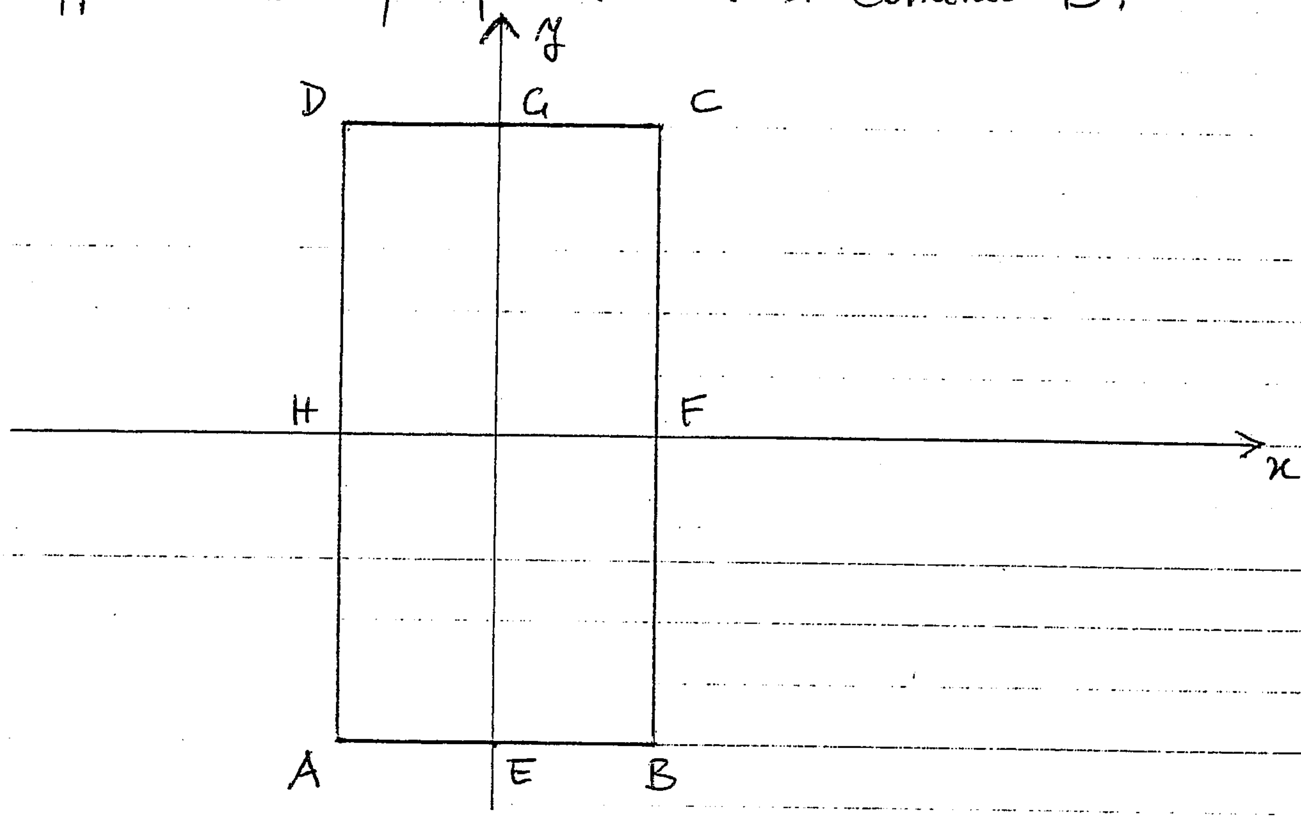
$$\simeq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

che converge.

Dunque la nostra serie è convergente.

ESERCIZIO 3

Rappresentiamo per prima cosa il dominio D.



Il dominio D è chiuso e limitato e la funzione f è continua. Perciò f ha max e minimo relativo in base al teorema di Weierstrass.
Per determinarli, calcoliamo per prima cosa il gradiente:

$$\nabla f(x,y) = (2x, 2y)$$

che si annulla solo nell'origine $O=(0,0)$. Si ha $f(0,0) = -5 \leq f(x,y) \quad \forall (x,y) \in D$, per cui -5 è sicuramente il minimo assoluto.

Il massimo assoluto si trova perciò necessariamente sul bordo. Per determinarlo usiamo il teorema di Lagrange. Poichè la frontiera è costituita solo da tratti verticali e orizzontali, la condizione di ortogonalità richiede che una delle due componenti del gradiente si dovrebbe annullare. Otteniamo perciò i punti

$E = (0,-2)$, $G = (0,2)$, $H = (-1,0)$, $F(1,0)$.

Risulta $f(E) = f(G) = -1$, $f(H) = f(F) = -4$

Resta da valutare la f nei punti singolari A, B, C, D. Si ha

$$f(A) = f(B) = f(C) = f(D) = 0$$

Perciò il minimo assoluto è -5 e lo si raggiunge in O mentre il massimo assoluto è 0 e lo si raggiunge nei punti A, B, C, D.

<u>OSSERVAZIONE</u>: l'esercizio poteva essere svolto anche con altri procedimenti alternativi, per esempio con il metodo delle curve caratteristiche.

ESERCIZIO 4

Il dominio D è metà ellisse. Parametrizziamola come

$$\begin{cases} 2x = \rho \cos \vartheta \\ 3y = \rho \operatorname{sen} \vartheta \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} \rho \cos \vartheta & 0 \le \rho \le 1 \\ y = \frac{1}{3} \rho \operatorname{sen} \vartheta & 0 \le \vartheta \le \pi \end{cases}$$

Lo jacobiano del cambio di variabili è dato da:

$$J = \left| \det \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \rho \operatorname{sen} \vartheta & \frac{1}{2} \cos \vartheta \\ \frac{1}{3} \rho \cos \vartheta & \frac{1}{3} \operatorname{sen} \vartheta \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{6} \rho$$

Si ha quindi

$$\iint_D (4x^2 + 9y^2)\, dx\, dy = \int_0^1 \left(\int_0^\pi \frac{1}{6} \rho \cdot \rho^2 \, d\vartheta \right) d\rho =$$

$$= \pi \, \frac{1}{24} \rho^4 \Big|_0^1 = \frac{\pi}{24}$$

Facoltà di Ingegneria — Prof. Bruno Rubino
Analisi Matematica 2 (seconda parte) A.A. 2001/02

Cognome e nome:______________________ Tempo: 90 minuti

Matricola:______________ *L'Aquila, 16 dicembre 2002*

Corso di Laurea:______________________

Esercizio A

Studiare i punti critici del sistema dinamico

$$\begin{cases} \dot{x} = x \\ \dot{y} = arctan\,(y - x^2) \end{cases}$$

Esercizio B

Studiare la convergenza puntuale e uniforme per la serie di potenze ($z \in \mathbb{C}$)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \tan\left(\frac{n}{n^3+5}\right) z^n$$

Esercizio C

Sia dato il campo vettoriale

$$F(x,y,z) = \left(\frac{x}{x^2+y^4+z^6}, \frac{2y^3}{x^2+y^4+z^6}, \frac{3z^5}{x^2+y^4+z^6}\right)$$

Stabilire *a priori* se è conservativo e, in caso affermativo, calcolarne un potenziale.

ANALISI MATEMATICA 2 (seconda parte) - L'Aquila, 16.12.02
Facoltà di Ingegneria - A. A. 2001/02

ESERCIZIO A

I punti critici del sistema dinamico sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x=0 \\ \operatorname{arctg}(y-x^2)=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=0 \\ y=x^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$$

L'origine è l'unico punto critico.
Per stabilirne la natura, dette

$$\begin{cases} f(x,y)=x \\ g(x,y)=\operatorname{arctg}(y-x^2) \end{cases},$$

consideriamo la matrice

$$\begin{pmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{2x}{1+(y-x^2)^2} & \dfrac{1}{1+(y-x^2)^2} \end{pmatrix}$$

che valutata nell'origine ci dà

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

L'origine è perciò un nodo repulsivo sia per il sistema linearizzato che per il non lineare di partenza.

ESERCIZIO B

Sia $a_n = \operatorname{tg} \frac{n}{n^3+5}$

Per stabilire il raggio di convergenza calcoliamo

$$r = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\,[(n+1)^3+5]}{(n^3+5)\ (n+1)} = 1.$$

Proviamo a vedere se c'è convergenza totale sul cerchio di raggio unitario:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sup_{|z|\leq 1} \left| \operatorname{tg}\left(\frac{n}{(n^3+5)}\right) z^n \right| = \sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{tg}\left(\frac{n}{n^3+5}\right) =$$

poichè il primo termine è nullo

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg}\left(\frac{n}{n^3+5}\right) \simeq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3+5} \simeq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2},$$

come già visto nell'esercizio 2 della prima parte. L'ultima serie converge.

Dunque, c'è convergenza totale in

$\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ e di conseguenza

a) c'è convergenza puntuale per ogni $z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1$;

b) c'è convergenza uniforme su ogni insieme Ω tale che $\Omega \subseteq \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$

ESERCIZIO C

Il campo vettoriale è definito su $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$.

Tale dominio è semplicemente connesso. Per stabilire se è conservativo basta perciò vedere se è irrotazionale.

Si ha, detto $F = (F_1, F_2, F_3)$,

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{-x \cdot 4y^3}{(x^2+y^4+z^6)^2}$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial z} = \frac{-x \cdot 6z^5}{(x^2+y^4+z^6)^2}$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{-2y^3 \cdot 2x}{(x^2+y^4+z^6)^2} = \frac{\partial F_1}{\partial y}$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial z} = \frac{-2y^3 \cdot 6z^5}{(x^2+y^4+z^6)^2}$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial x} = \frac{-3z^5 \cdot 2x}{(x^2+y^4+z^6)^2} = \frac{\partial F_1}{\partial z}$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial y} = \frac{-3z^5 \cdot 4y^3}{(x^2+y^4+z^6)^2} = \frac{\partial F_2}{\partial z}$$

per cui F è irrotazionale e quindi conservativo.

Resta da determinare un potenziale. Si ha

$$P(x,y,z)=\int\frac{x\,dx}{x^2+y^4+z^6}$$

$$=\frac{1}{2}\log(x^2+y^4+z^6)+\varphi(y,z),\quad \varphi\in C^1(\mathbb{R}^2)\text{ generica}$$

Si deve avere però

$P_y=F_2$, da cui

$$\frac{1}{\cancel{2}}\,\frac{\overset{2}{\cancel{4}}\,y^3}{x^2+y^4+z^6}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}=\frac{2y^3}{x^2+y^4+z^6}$$

da cui $\varphi(y,z)=\psi(z)$, $\psi\in C^1(\mathbb{R})$ generica.

Infine deve essere

$P_z=F_3$, da cui

$$\frac{1}{\cancel{2}}\,\frac{\overset{3}{\cancel{6}}\,z^5}{x^2+y^4+z^6}+\psi'(z)=\frac{3z^5}{x^2+y^4+z^6}$$

e di conseguenza $\psi(z)=K$, $K\in\mathbb{R}$.

Abbiamo perciò trovato il potenziale

$$P(x,y,z)=\log\sqrt{x^2+y^4+z^6}+K,\quad K\in\mathbb{R}.$$