COMPITO R – Prima verifica di Analisi Matematica 2 (6 CFU)
Ingegneria Chimica, Civile, Elettronica — Prof. B. Rubino

Cognome e nome: ______________________________

Matricola: ______________________

Corso di laurea (precisare se v.o.): ______________________________

L'Aquila, 13 marzo 2003

Esercizio

Sia data la funzione $f:\ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3\cos(y)+y^3\cos(x)}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

a) Dire se f è continua su $\mathbb{R}^2$;

b) Calcolare le derivate parziali di f in $(0,0)$;

c) Dire se f è differenziabile in $(0,0)$.

Risoluzione

a) La funzione f é continua fuori dall'origine perché composizione di funzioni continue. Si tratta solo di calcolare il limite di f nell'origine: la f è continua anche in $(0,0)$ se tale limite sarà uguale a zero.

$\lim_{(x,y)\to 0} f(x,y) =$ passando in coordinate polari $\begin{cases} x=\rho\cos\vartheta \\ y=\rho\,\text{sen}\,\vartheta \end{cases}$

$\rho \geq 0$, $\vartheta \in [0,2\pi)$, si ha

$$= \lim_{\rho\to 0^+} \frac{\rho^{\cancel{3}}\left[\cos^3\vartheta\cos(\rho\,\text{sen}\,\vartheta)+\text{sen}^3\vartheta\cos(\rho\cos\vartheta)\right]}{\cancel{\rho^2}} = 0$$

visto che vi è ρ in evidenza che moltiplica una funzione limitata (prodotto e somma di seno e coseno).

b) Si ha

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t\cos(0)}{t} = 1,$$

per cui

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 1.$$ Analogamente,

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t\cos(0)}{t} = 1,$$

per cui

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 1.$$

c) Per verificare la differenziabilità di f nell'origine,

$$\lim_{(t,s)\to 0} \frac{f(t,s)-f(0,0)-\langle \nabla f(0,0),(t,s)\rangle}{\sqrt{t^2+s^2}} =$$

$$= \lim_{(t,s)\to 0} \frac{\frac{t^3\cos s + s^3\cos t}{t^2+s^2} - t - s}{\sqrt{t^2+s^2}} =$$

usando le coordinate polari precedentemente introdotte,

$$\begin{cases} t = \rho\cos\vartheta & \rho \geq 0 \\ y = \rho\,\text{sen}\,\vartheta & \vartheta\in[0,2\pi), \end{cases}$$ si ha

$$\lim_{\rho\to 0^+} \frac{\frac{\rho^3\cos^3\vartheta\cos(\rho\,\text{sen}\,\vartheta)+\rho^3\text{sen}^3\vartheta\cos(\rho\cos\vartheta)}{\rho^2} - \rho(\cos\vartheta+\text{sen}\,\vartheta)}{\rho} =$$

$$= \lim_{\rho\to 0^+} \cos^3\vartheta\cos(\rho\,\text{sen}\,\vartheta)+\text{sen}^3\vartheta\cos(\rho\cos\vartheta) - \cos\vartheta - \text{sen}\,\vartheta =$$

$= \cos^3\vartheta + \text{sen}^3\vartheta - \cos\vartheta - \text{sen}\,\vartheta \neq 0$, per cui f non è differenziabile nell'origine.

COMPITO R – Seconda verifica di Analisi Matematica 2 (6 CFU)
Ingegneria Chimica, Civile, Elettronica — Prof. B. Rubino

Cognome e nome: ______________________________

Matricola: ____________________

Corso di laurea (precisare se v.o.): ______________________________

L'Aquila, 13 marzo 2003

Esercizio

Sia data la funzione $f:\ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = \log\left(1 + x^2 + y^2\right) - xy.$$

a) Calcolare il gradiente della funzione f per verificare che l'origine è un punto stazionario.

b) Calcolare la matrice hessiana della funzione f e i suoi autovalori per verificare che l'origine è un punto di minimo relativo.

c) Esistono altri punti stazionari di f sul suo dominio di definizione?

d) L'origine è anche minimo assoluto per la funzione f?

N.B.: tutte le affermazioni vanno opportunamente motivate.

Risoluzione

a) Si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{1+x^2+y^2} - y, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y}{1+x^2+y^2} - x$$

In particolare $\nabla f(0,0) = (0,0)$, per cui $(0,0)$ è un punto stazionario.

b) Si ha poi

$$f_{xx} = \frac{2(1+x^2+y^2)-(2x)^2}{(1+x^2+y^2)^2}, \quad f_{yy} = \frac{2(1+x^2+y^2)-(2y)^2}{(1+x^2+y^2)^2}$$

$f_{xy} = -\dfrac{4xy}{(1+x^2+y^2)^2} - 1 = f_{yx}$ visto che $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$.

Perciò

$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ si ha poi $\det \begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & 2-\lambda \end{pmatrix} =$

$= (2-\lambda)^2 - 1 = 0$ per $(2-\lambda)^2 = 1$, da cui

$2 - \lambda = \mp 1$, per cui $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$

I due autovalori sono positivi, per cui l'origine è un punto di minimo relativo.

c) Eventuali ulteriori punti stazionari sono soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \dfrac{2x}{1+x^2+y^2} = y \\ \dfrac{2y}{1+x^2+y^2} = x \end{cases}$$

Oltre al punto $(0,0)$, non esistono ulteriori punti stazionari del tipo $(x_0, 0)$ o del tipo $(0, y_0)$. Perciò possiamo supporre $x \neq 0$ e $y \neq 0$.

Dividendo membro a membro la prima equazione per la seconda si ha:

$\dfrac{x}{y} = \dfrac{y}{x}$, ovvero $x = \mp y$. Otteniamo perciò

i due sistemi: $\begin{cases} x = y \\ \dfrac{2x}{1+2x^2} = x \end{cases}$ $\begin{cases} x = -y \\ \dfrac{2x}{1+2x^2} = -x \end{cases}$

Dividendo la seconda delle equazioni di tali sistemi per x, si ha $\dfrac{2}{1+2x^2} = \mp 1$ Il caso negativo è assurdo visto che il primo membro è positivo. Nel caso positivo si ha

$2 = 1 + 2x^2$, ovvero $x^2 = \frac{1}{2}$, ovvero $x = \mp \frac{\sqrt{2}}{2}$

Abbiamo quindi ottenuto i due valori

$A = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $B = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

che sono punti stazionari così come $O = (0,0)$.

d) L'origine non è un minimo assoluto. Infatti, se $x = y$ e calcoliamo

$$\lim_{x=y \to +\infty} f(x,y) = \lim_{t \to +\infty} \log(1 + 2t^2) - t^2 = -\infty.$$

COMPITO R – Terza verifica di Analisi Matematica 2 (6 CFU)
Ingegneria Chimica, Civile, Elettronica — Prof. B. Rubino

Cognome e nome: ______________________________

Matricola: ____________________

Corso di laurea (precisare se v.o.): ______________________________

L'Aquila, 13 marzo 2003

N.B.: tutte le affermazioni vanno opportunamente motivate.

Esercizio 1

Calcolare, se esiste, il seguente limite:

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x^2+z^2}{x^2+y^2}$$

Risoluzione

Il limite non esiste. Infatti, lungo la retta $(t,0,0)$, $t\in\mathbb{R}$, il limite diviene

$$\lim_{t\to 0} \frac{t^2}{t^2} = 1$$

mentre lungo la retta $(0,s,0)$, $s\in\mathbb{R}$, il limite diviene

$$\lim_{s\to 0} \frac{0}{s^2} = 0$$

Visto che il risultato é diverso nelle due direzioni, il limite proposto non esiste.

Esercizio 2

Sia data la funzione $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y,z) = x^4 + y^2 + e^{-z^2}.$$

a) Stabilire il dominio di definizione della funzione f.

b) Calcolare il gradiente e stabilire i punti stazionari della funzione f.

c) Calcolare la matrice hessiana e classificare i punti stazionari della funzione f.

Risoluzione

a) La funzione è definita su tutto $\mathbb{R}^3$ e di classe C^∞ perché composizione e somma di funzioni con tale regolarità.

b) Si ha $f_x = 4x^3$, $f_y = 2y$, $f_z = -2ze^{-z^2}$. I punti stazionari sono perciò le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} 4x^3 = 0 \\ 2y = 0 \\ -2ze^{-z^2} = 0 \end{cases}$$

Perciò l'origine è l'unico punto stazionario.

c) Si ha

$f_{xx} = 12x^2$, $f_{xy} = 0$, $f_{xz} = 0$, $f_{yy} = 2$, $f_{yz} = 0$,

$f_{zz} = (4z^2 - 2)e^{-z^2}$. Perciò

$$H_f(0,0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

La matrice è indefinita, per cui l'origine è un punto di sella.

COMPITO R – Quarta verifica di Analisi Matematica 2 (6 CFU)
Ingegneria Chimica, Civile, Elettronica — Prof. B. Rubino

Cognome e nome: ______________________________

Matricola: ____________________

Corso di laurea (precisare se v.o.): ______________________________

L'Aquila, 13 marzo 2003

N.B.: tutte le affermazioni vanno opportunamente motivate.

Esercizio 1

Trovare la soluzione generale $y = y(t)$ dell'equazione differenziale:

$$y' + \left(\frac{2t}{t^2+1}\right) y = t$$

Risoluzione

Si tratta di un'equazione differenziale lineare del 1° ordine del tipo

$y' + a(t)y = b(t)$, la cui soluzione generale è data da

$y(t) = k(t)\, e^{-A(t)}$, dove $A(t) = \int a(t)\, dt = \int \frac{2t\, dt}{1+t^2} =$

$= \log(1+t^2) + \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$ e $k(t) = \int b(t)\, e^{A(t)} dt =$

$= e^{\alpha} \int t\,(1+t^2)\, dt = e^{\alpha} \int (t + t^3)\, dt = e^{\alpha}\left(\frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4} + \beta\right)$,

$\beta \in \mathbb{R}$. La soluzione generale è perciò data da

$y(t) = \frac{1}{1+t^2}\left(\frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4} + \beta\right)$, $\beta \in \mathbb{R}$.

Esercizio 2

Studiare il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \sqrt{1-y^2} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Risoluzione

Si tratta del problema di Cauchy relativo ad una equazione differenziale (autonoma) a variabili separabili. Il dominio di definizione di $f(y) = \sqrt{1-y^2}$ è dato da $|y| \leq 1$. Poiché $y(t_0) = y_0$ con $t_0 = 0$ e $y_0 = 0$, per il teorema di Cauchy abbiamo esistenza e unicità locale della soluzione.

Vi potrebbero essere problemi se, in tempo finito, il valore di y dovesse giungere a $|y| = 1$. Separando le variabili e integrando si ha

$$\int_0^{y(t)} \frac{ds}{\sqrt{1-s^2}} = \int_0^t ds, \quad \text{da cui}$$

$$\arcsin s \Big|_{s=0}^{s=y(t)} = t, \quad \text{ovvero} \quad \arcsin(y(t)) = t$$

da cui $t \in [-\pi/2, \pi/2]$ e per tali valori invertendo si ha

$$y(t) = \operatorname{sen}(t), \quad t \in [-\pi/2, \pi/2].$$

Si osservi che $y(-\pi/2) = -1$, $y(\pi/2) = 1$ mentre $|\operatorname{sen} t| < 1$ per $t \in (-\pi/2, \pi/2)$. Si osservi che

1) $f(y) \geq 0$ per ogni y del suo dominio di definizione;

2) $y = \mp 1$ sono soluzioni costanti dell'equazione differenziale.

Perciò l'unica soluzione del problema di Cauchy è data dalla funzione $y \in C^1(\mathbb{R})$ data da

$$y(t) = \begin{cases} -1 & \text{per } t < -\frac{\pi}{2} \\ \operatorname{sen} t & \text{per } t \in (-\pi/2, \pi/2) \\ +1 & \text{per } t > \frac{\pi}{2} \end{cases}.$$

COMPITO R – Quinta verifica di Analisi Matematica 2 (6 CFU)
Ingegneria Chimica, Civile, Elettronica — Prof. B. Rubino

Cognome e nome: ____________________

Matricola: ______________

Corso di laurea (precisare se v.o.): ____________________

L'Aquila, 13 marzo 2003

Esercizio 1

Giustificando opportunamente la risposta, stabilire se il seguente integrale improprio converge:

$$\int_1^{+\infty} \frac{\log\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\sin\left(\frac{1}{x}\right)} \arctan\left(\frac{1}{x^2}\right) dx$$

Risoluzione

La funzione integranda è ben definita per $x \geq 1$ e continua. Si tratta solo di stabilirne l'integrabilità per $x \to +\infty$. Poiché

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)} = 1 \quad e \quad \lim_{x\to+\infty} x^2 \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x^2}\right) = 1,$$

per cui

$$\int_1^{\infty} \frac{\log\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x^2}\right) dx \;\tilde{=}\;$$ converge se e solo

se converge l'integrale

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\, dx = \lim_{R\to+\infty} \left(-\frac{1}{x} \Big|_{x=1}^{x=R} \right) =$$

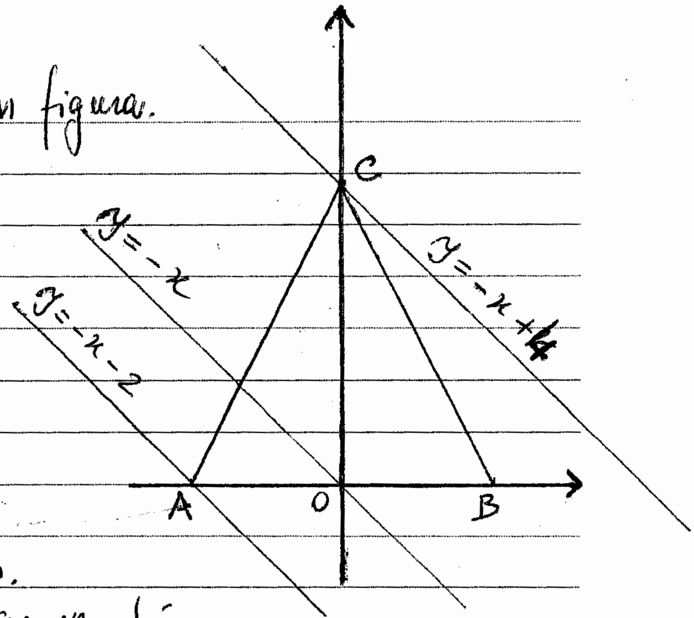
$$= \lim_{R\to+\infty} \left(-\frac{1}{R} + 1 \right) = 1,$$ per cui vi è convergenza.

Esercizio 2

Stabilire, se ciò ha senso, il massimo e il minimo assoluto della funzione

$$F(x, y) = x + y$$

nella regione delimitata dal triangolo di vertici $A = (-2, 0)$, $B = (2, 0)$, $C = (0, 4)$.



Risoluzione

Il triangolo è quello riportato in figura.

Riportiamo le curve di livello $F(x,y)=k$, $k \in \mathbb{R}$.
Il triangolo è una porzione del piano chiusa e limitata, la F è continua, per cui, in base al Teorema di Weierstrass, esistono sia il massimo che il minimo assoluto.
Al variare di K le varie curve di livello $x+y=k$ andranno dal vertice A al vertice C del triangolo. Abbiamo perciò

i) minimo assoluto $m=-2$

ii) massimo assoluto $M=4$.

Esercizio 3

Dire se i seguenti integrali impropri *convergono*:

$a)$ $\int_{-1}^{0} \frac{\cos(x^2)}{\log(1+x^2)} dx$ $\boxed{\text{SI}}$ $\cancel{\boxed{\text{NO}}}$

$b)$ $\int_{-\infty}^{0} \frac{dt}{1+t^2+t^4}$ $\cancel{\boxed{\text{SI}}}$ $\boxed{\text{NO}}$

COMPITO R – Sesta verifica di Analisi Matematica 2 (6 CFU)
Ingegneria Chimica, Civile, Elettronica — Prof. B. Rubino

Cognome e nome: ______________________________

Matricola: ____________________

Corso di laurea (precisare se v.o.): ______________________________

L'Aquila, 13 marzo 2003

Esercizio 1

Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\arctan(n!)}{1+n^2+n^4}$$

Risoluzione

Come è noto $0 \leq \operatorname{arctg} x < \frac{\pi}{2}$ per ogni $x \geq 0$.

La serie è, quindi, a valori non negativi. Si ha, quindi,

$$0 \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}(n!)}{1+n^2+n^4} \leq \frac{\pi}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+n^2+n^4}$$

La serie data ha lo stesso comportamento di

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$, per cui risulta convergente.

Esercizio 2

Sia data l'equazione differenziale

$$y'' - y = -1$$

a) Calcolare l'integrale generale dell'equazione omogenea associata;

b) Facendo uso del metodo di somiglianza, calcolare una soluzione particolare dell'equazione completa;

c) Facendo uso del metodo di variazione delle costanti, calcolare una soluzione particolare dell'equazione completa;

d) Facendo uso di quanto trovato nei punti precedenti, scrivere l'integrale generale dell'equazione non omogenea.

Risoluzione

Si tratta di un'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti del 2° ordine non omogenea.

a) L'omogenea associata è data da $y'' - y = 0$, il cui polinomio caratteristico è dato da $\lambda^2 - 1 = 0$, da cui $\lambda = \mp 1$. L'integrale generale è dato perciò da

$$y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{t}$$

b) Il secondo membro non dipende né da e^t né da e^{-t}. Cerco una soluzione particolare tra le costanti: $y(t) = k$, da cui sostituendo nell'equazione $-k = -1$, da cui $k = 1$. La soluzione particolare è perciò $\bar{y}(t) = 1$.

c) Cerco una soluzione del tipo $y(t) = c_1(t) e^{-t} + c_2(t) e^{t}$.

Si ha

$y'(t) = -c_1(t) e^{-t} + c_2(t) e^{t} + c_1'(t) e^{-t} + c_2'(t) e^{t}$ e la prima

condizione è $\quad c_1'(t) e^{-t} + c_2'(t) e^{t} = 0$

Derivando ancora abbiamo

$y''(t) = c_1(t) e^{-t} + c_2(t) e^{t} - c_1'(t) e^{-t} + c_2'(t) e^{t}$

e sostituendo nell'equazione si ha:

$\cancel{c_1(t) e^{-t}} + \cancel{c_2(t) e^{t}} - c_1'(t) e^{-t} + c_2'(t) e^{t} - \cancel{c_1(t) e^{-t}} - \cancel{c_2(t) e^{t}} = -1$

Mettendo assieme le due relazioni trovate si ha

$$\begin{cases} e^{-t} c_1'(t) + e^{t} c_2'(t) = 0 \\ -e^{-t} c_1'(t) + e^{t} c_2'(t) = -1 \end{cases}$$

sommando le quali si ha

$2e^{t} c_2'(t) = -1$, ovvero $c_2'(t) = -\frac{1}{2} e^{-t}$,

da cui $c_2(t) = \frac{1}{2} e^{-t} + c_2$, $c_2 \in \mathbb{R}$.

Eseguendo invece la differenza tra le due equazioni si ha

$2e^{-t} c_1'(t) = 1$, ovvero $c_1'(t) = \frac{1}{2} e^{t}$,

da cui $c_1(t) = \frac{1}{2} e^{t} + c_1$, $c_1 \in \mathbb{R}$.

Prendendo $c_1 = c_2 = 0$ si ottiene in particolare la soluzione

$$\bar{y}(t) = \left(\frac{1}{2} e^{t}\right) e^{-t} + \left(\frac{1}{2} e^{-t}\right) e^{t} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

d) Tenuto conto della soluzione particolare calcolata in (b) e in (c) e della soluzione generale dell'equazione omogenea associata calcolata in (a), si ottiene la soluzione generale dell'equazione non omogenea

$$y(t) = 1 + c_1 e^{-t} + c_2 e^{t}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

COMPITO R – Settima verifica di Analisi Matematica 2 (6 CFU)
Ingegneria Chimica, Civile, Elettronica — Prof. B. Rubino

Cognome e nome: ______________________________

Matricola: ____________________

Corso di laurea (precisare se v.o.): ______________________________

L'Aquila, 13 marzo 2003

Esercizio 1

Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n-\pi}$$

Risoluzione

Si osservi che, eccetto i primi quattro termini, $a_n = \frac{\sqrt{n}}{n-\pi}$ è non negativo. Inoltre, detta $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x-\pi}$, si ha

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(x-\pi) - \sqrt{x}}{(x-\pi)^2} = \frac{x-\pi-2x}{2\sqrt{x}\,(x-\pi)^2} = \frac{-x-\pi}{2\sqrt{x}\,(x-\pi)^2} < 0 \text{ per } x \geq 4.$$

Perciò a_n è monotona decrescente per $n \geq 4$ e inoltre $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{n-\pi} = 0$. Per il teorema di Leibnitz, visto che la serie è a segno alterno definitivamente ($n \geq 4$) e valgono le restanti ipotesi, la serie converge.

Esercizio 2

Calcolare l'integrale doppio

$$\iint_{\mathcal{D}} \frac{x}{y^2} e^{x/y}\, dx\, dy,$$

dove

$$\mathcal{D} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 1 < x < 2,\ \ 1 \le \frac{x}{y} \le 3 \right\}.$$

Risoluzione

Introduciamo le nuove variabili $s = x$ e $t = \frac{x}{y}$, ovvero

$$\begin{cases} x = s & 1 < s < 2 \\ y = \frac{s}{t} & 1 \leqslant t \leqslant 3 \end{cases} \quad \text{e si ha} \quad \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{t} & -\frac{s}{t^2} \end{pmatrix} = -\frac{s}{t^2} - \frac{1}{t}$$

Perciò

$$\iint_{\mathcal{D}} \frac{x}{y^2} e^{\frac{x}{y}}\, dx\, dy = \int_1^2 \int_1^3 \left(\frac{s}{t^2} + \frac{1}{t} \right) \frac{t^2}{s} e^t \, ds\, dt$$

$$= \int_1^2 \int_1^3 \left(e^t + \frac{t}{s} e^t \right) ds\, dt = \int_1^2 \int_1^3 e^t \, ds\, dt + \int_1^2 \int_1^3 \frac{t}{s} e^t \, ds\, dt$$

$$= e^t \Big|_1^3 + \int_1^2 \frac{1}{s}\, ds \int_1^3 t e^t \, dt = \left(e^3 - e \right) +$$

$$+ \log 2 \ (t-1) e^t \Big|_1^3 = \left(e^3 - e \right) + \log 2 \left(2e^3 \right) = -e + e^3 \log(4e)$$

visto che

$$\int t e^t \, dt = t e^t - \int e^t \, dt = (t-1) e^t + k, \ k \in \mathbb{R}.$$

COMPITO R – Ottava verifica di Analisi Matematica 2 (6 CFU)
Ingegneria Chimica, Civile, Elettronica — Prof. B. Rubino

Cognome e nome: ______________________________

Matricola: ____________________

Corso di laurea (precisare se v.o.): ______________________________

L'Aquila, 13 marzo 2003

Esercizio 1

Studiare la convergenza puntuale e uniforme della serie di potenze ($x \in \mathbb{R}$)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \cos\left(1 + \frac{1}{e^n}\right) x^n$$

Risoluzione

Fatta eccezione per il primo termine, $a_n = \cos(1 + e^{-n})$ è non negativa e monotona crescente.

Si ha $r = \lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = 1$

Si ha poi, per ogni x t.c. $|x| = 1$,

$$\lim_{n \to \infty} \left| \cos\left(1 + \frac{1}{e^n}\right) x^n \right| = \cos(1) \neq 0.$$

Non valendo la condizione necessaria di convergenza per $x = \mp 1$, si ha

a) convergenza puntuale per $-1 < x < 1$

b) convergenza (totale e) uniforme per ogni insieme contenuto nell'intervallo $[-1+\delta, 1-\delta]$ per qualche $\delta > 0$.

Esercizio 2

Facendo opportunamente uso dello sviluppo di Taylor, calcolare

$$\lim_{x\to 1} \frac{\log(x^2)}{\sin(2\pi x^2)}$$

Risoluzione

$$\lim_{x\to 1} \frac{\log(x^2)}{\operatorname{sen}(2\pi x^2)} =$$ attraverso il cambio di variabile $t = x^2 - 1$,

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\log(1+t)}{\operatorname{sen}(2\pi + 2\pi t)} = \lim_{t\to 0} \frac{\log(1+t)}{\operatorname{sen}(2\pi t)} =$$

visto che

i) $\operatorname{sen}(\alpha t) = \alpha t + o(t^2)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$

ii) $\log(1+t) = t + o(t)$, si ha

$$= \lim_{t\to 0} \frac{t + o(t)}{2\pi t + o(t^2)} = \lim_{t\to 0} \frac{1+o(1)}{2\pi + o(t)} = \frac{1}{2\pi}$$

Esercizio 3

Scrivere il polinomio di Taylor in $(0,0)$ di grado 3 associato alla funzione

$$f(x,y) = e^{-x} + \arctan(x^2) + \cos(x^2 + y^4)$$

Risoluzione

Si ha, in un intorno dell'origine,

$$e^{-t} = 1 - t + \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{6}t^3 + o(t^3),$$

$$\operatorname{arctg} t = t - \frac{t^3}{3} + o(t^4)$$

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^3).$$ Perciò

$$f(x,y) = 1 - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) + x^2 + 1 + o(y^3)$$

Perciò il polinomio di Taylor richiesto è $P(x,y) = 2 - x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3$ (la non dipendenza da y è casuale!).

Analisi Matematica 2 (3 CFU) – A.A. 2002/03
Ingegneria Gestionale
Docente: Bruno Rubino – L'Aquila, 1 aprile 2003

Cognome e nome:______________________________

Matricola:____________________

Esercizio 1

Determinare l'intergale generale della seguente equazione differenziale:

$$y^{(4)} + y' = t.$$

Esercizio 2

Calcolare, se ciò ha senso, il massimo e il minimo assoluto della funzione

$$f(x,y) = x^2 y$$

sul dominio

$$\mathcal{D} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; x^2 + y^2 = 4\right\}.$$

Esercizio 3

Calcolare, se esiste

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\arcsin(x) - \sin(y)}{x^2 + y^2}$$

Esercizio 4

Studiare il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{1+3t^2}{1+\tan^2 y} \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Correzione prova scritta di Analisi Matematica 2 (3 CFU) per INGEGNERIA GESTIONALE — A.A. 2002/03, 1.4.03

ESERCIZIO 1 — Si tratta di una equazione differenziale lineare a coefficienti costanti del quarto ordine non omogenea.

Risolviamo per prima cosa l'omogenea associata:

$$y^{IV} + y' = 0$$

Il polinomio caratteristico associato è dato da

$\lambda^4 + \lambda = 0$ le cui soluzioni sono:

$\lambda = 0$ più le soluzioni dell'equazione

$\lambda^3 + 1 = 0$, ovvero, se $\lambda = \rho e^{i\vartheta}$

$$\rho^3 e^{3i\vartheta} = -1 = e^{i\pi + 2k\pi i}.$$ Perciò $\rho = 1$ e

$3i\vartheta = i\pi + 2k\pi i$, cioè $\vartheta_k = \frac{\pi}{3} + 2k\frac{\pi}{3}$, $k = -1, 0, 1$.

Le quattro soluzioni sono perciò $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -1$,

$\lambda_3 = \cos\frac{\pi}{3} + i\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\lambda_4 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

La soluzione dell'equazione differenziale omogenea associata è data perciò da

$$y(t) = c_1 + c_2 e^{-t} + \left(c_3 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + c_4\,\mathrm{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right) e^{t/2}$$

Per quanto riguarda la non omogenea, poichè $\lambda = 0$ è

soluzione del polinomio caratteristico con molteplicità 1, cerchiamo una soluzione della forma
$\bar{y}(t) = K_1 t^2 + K_2 t$, $K_1, K_2 \in \mathbb{R}$. Sostituendo si ha
$K_2 + 2K_1 t = t$, da cui $K_2 = 0$ e $K_1 = \frac{1}{2}$.
L'integrale generale è perciò dato da

$$y(t) = \frac{1}{2}t^2 + c_1 + c_2 e^{-t} + e^{t/2}\left(c_3 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + c_4 \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right)$$

ESERCIZIO 2 — Il dominio $\mathcal{D}$ è la circonferenza centrata nell'origine di raggio 2, per cui è un dominio chiuso e limitato. La funzione $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, per cui in particolare è continua. In base al teorema di Weierstrass esiste il minimo e massimo assoluto della funzione f su $\mathcal{D}$.
Parametrizzando $\mathcal{D}$,

$$\begin{cases} x = 2\cos\vartheta \\ y = 2\operatorname{sen}\vartheta \end{cases} \quad \vartheta \in [0, 2\pi)$$

$$f(x,y) = x^2 y = 8\cos^2\vartheta \operatorname{sen}\vartheta = \varphi(\vartheta)$$

$$\varphi'(\vartheta) = -16\cos\vartheta \operatorname{sen}^2\vartheta + 8\cos^3\vartheta =$$

$$= 8\cos\vartheta\left(\cos^2\vartheta - 2\operatorname{sen}^2\vartheta\right) = 0$$

I punti di massimo e minimo assoluto sono da ricercare tra gli zeri di $\varphi'(\vartheta)$.
Si ha:

a) $\cos\vartheta = 0 \Rightarrow x = 0$, da cui $f(x,y) = x^2 y = 0$

b) $\cos^2\vartheta = 2\,\mathrm{sen}^2\vartheta$, ovvero $\frac{x^2}{4} = 2\left(\frac{y}{2}\right)^2$, da cui

$$\begin{cases} x^2 = 2y^2 \\ x^2+y^2 = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4-y^2 = 2y^2 \\ x^2 = 2y^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = \pm\frac{2\sqrt{3}}{3} \\ x^2 = 2\cdot\frac{4}{3} = \frac{8}{3} \end{cases}$$

Otteniamo perciò i due valori $\pm\frac{2}{3}\frac{8}{3}\sqrt{3} = \pm\frac{16}{9}\sqrt{3}$

Confrontando tali valori con 0, si ha:

$\min\limits_{D} f = -\frac{16}{9}\sqrt{3}$, $\quad \max\limits_{D} f = +\frac{16}{9}\sqrt{3}$.

ESERCIZIO 3 – Il limite proposto non esiste. Infatti, lungo la retta $(t,0)$, $t\in\mathbb{R}$, il limite diviene

$\lim\limits_{t\to 0} \frac{\mathrm{arcsen}\,t}{t^2}$ che non esiste visto che

$\lim\limits_{t\to 0^+} \frac{\mathrm{arcsen}\,t}{t^2} = +\infty$, mentre $\lim\limits_{t\to 0^-} \frac{\mathrm{arcsen}\,t}{t^2} = -\infty$.

ESERCIZIO 4 – L'equazione differenziale del problema è a variabili separabili. Tenuto conto del dominio di definizione della funzione tg, il dominio di definizione del secondo membro è
$$D = \mathbb{R}_t \times \left(-\pi/2, \pi/2\right).$$

Separando le variabili si ha
$$\int_0^{y(t)} \left(1+\mathrm{tg}^2 s\right) ds = \int_0^t \left(1+3s^2\right) ds$$
$$\mathrm{tg}\, s \Big|_{s=0}^{s=y(t)} = \left(s+s^3\right)\Big|_{s=0}^{s=t}$$
$$\mathrm{tg}(y(t)) = t + t^3$$

Poichè tg è monotona e con immagine tutto $\mathbb{R}$, possiamo invertire senza alcuna condizione aggiuntiva. Si ha
$$y(t) = \mathrm{arctg}\left(t+t^3\right), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Analisi Matematica 2 (3 CFU) – A.A. 2002/03

Ingegneria Gestionale

Docente: Bruno Rubino – L'Aquila, 11 aprile 2003

Cognome e nome:____________________________

Matricola:____________________

Esercizio 1

Studiare il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y^2 - 9 \\ y(0) = \alpha \end{cases}$$

al variare di $\alpha \leq 0$. Tracciare il grafico delle soluzioni.

Esercizio 2

Classificare i punti stazionari della funzione $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x, y) = x^2 + 3xy - y^2.$$

Esercizio 3

Sia data la funzione $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x, y) = x^2 + y^4.$$

Calcolare la derivata direzionale di f nel punto $P = (2, 3)$ nella direzione $v = (-2, 2)$.

Esercizio 4

Studiare il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + 3y' - 4y = 5 \\ y(0) = y'(0) = 0. \end{cases}$$

Correzione prova scritta di Analisi Matematica 2 (3 CFU) per Ingegneria GESTIONALE – A.A. 2002/03, 11.4.03

ESERCIZIO 1 – L'equazione differenziale associata al problema è a variabili separabili (in particolare autonoma). Il dominio di definizione della $f(y) = y^2 - 9$ è tutto $\mathbb{R}$. Supponiamo $\alpha \neq -3$. Separando le variabili e integrando si ha

$$\int_{\alpha}^{y(t)} \frac{ds}{s^2-9} = \int_0^t ds$$

Poichè $\displaystyle \frac{1}{s^2-9} = \frac{1}{6}\,\frac{1}{s-3} - \frac{1}{6}\,\frac{1}{s+3}$, si ha

$$\frac{1}{6}\log\left|\frac{s-3}{s+3}\right|\Bigg|_{s=\alpha}^{s=y(t)} = t$$

$$\log\left(\frac{y(t)-3}{\alpha-3}\,\frac{\alpha+3}{y(t)+3}\right) = 6t$$

Poichè la funzione log è monotona e con immagine tutto $\mathbb{R}$, possiamo invertire ottenendo

$$\frac{y(t)-3}{y(t)+3} = \frac{\alpha-3}{\alpha+3}e^{6t}, \quad \text{ovvero}$$

$$y(t) = 3\,\frac{1+\frac{\alpha-3}{\alpha+3}e^{6t}}{1-\frac{\alpha-3}{\alpha+3}e^{6t}}$$

Distinguiamo ora due casi:

1) $\alpha < -3$ e in tal caso

$$1 - \frac{\alpha-3}{\alpha+3} e^{6t} = 0 \quad \text{per} \quad e^{6t} = \frac{\alpha+3}{\alpha-3},$$

$$\bar{t} = \frac{1}{6} \log\left(\frac{\alpha+3}{\alpha-3}\right) < 0$$

Perciò la soluzione è definita per $t > \frac{1}{6} \log\left(\frac{\alpha+3}{\alpha-3}\right)$

Inoltre $\lim_{t \to +\infty} y(t) = -3.$

2) $-3 < \alpha \leq 0$ e in tal caso $\frac{\alpha-3}{\alpha+3} < 0$, per cui

$1 - \frac{\alpha-3}{\alpha+3} e^{6t} > 1$. Perciò la soluzione è

definita in tal caso $\forall t \in \mathbb{R}$.

Inoltre

$$\lim_{t \to -\infty} y(t) = +3, \quad \lim_{t \to +\infty} y(t) = -3.$$

Resta il caso $\alpha = 3$. In tal caso la soluzione è $y(t) \equiv -3$, definita $\forall t \in \mathbb{R}$.

Osserviamo infine che il problema di Cauchy proposto verifica le ipotesi del teorema di Cauchy di esistenza e unicità locale qualunque sia $\alpha \in \mathbb{R}$.

ESERCIZIO 2 – La funzione $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$. Calcoliamone per prima cosa i punti stazionari.

$$\begin{cases} f_x = 2x + 3y = 0 \\ f_y = 3x - 2y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = \frac{3}{2}x \\ 2x + \frac{9}{2}x = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

L'unico punto stazionario è l'origine. Si ha $f_{xx} = 2$, $f_{xy} = 3$, $f_{yy} = -2$, per cui

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

il cui determinante è $-4-9 = -13 < 0$, per cui $(0,0)$ è un punto di sella.

ESERCIZIO 3 – Poichè la $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, per calcolarne la derivata nella direzione v basta

$$\frac{\partial f}{\partial v}(P) = \langle \nabla f(P), v \rangle$$

Nel nostro caso, $\nabla f(x,y) = (2x, 4y^3)$, per cui

$$\frac{\partial f}{\partial v}(2,3) = \langle (4, 108), (-2,2) \rangle = -8 - 216 = -224$$

ESERCIZIO 4 – L'equazione differenziale del nostro problema di Cauchy è lineare a coefficienti costanti del 2° ordine non omogenea. Studiamo prima l'equazione omogenea associata,

$$y''+3y'-4y=0$$

il cui polinomio caratteristico associato é

$$\lambda^2+3\lambda-4=0,$$

le cui soluzioni sono

$$\lambda_1=-4,\quad \lambda_2=+1.$$

La soluzione generale dell'equazione differenziale omogenea è, perciò,

$$y(t)=c_1 e^{-4t}+c_2 e^{t}$$

Per quanto riguarda la non omogenea, tenuto conto che $\lambda=0$ non è soluzione del polinomio caratteristico, cerco una soluzione del tipo $y(t)=k$, $k\in\mathbb{R}$.

Sostituendo si ha

$-4k=5$, da cui $k=-\frac{5}{4}$.

La soluzione generale dell'equazione non omogenea é

$$y(t)=-\frac{5}{4}+c_1 e^{-4t}+c_2 e^{t}$$

Imponiamo ora le condizioni iniziali. Si ha

$y'(t)=-4c_1 e^{-4t}+c_2 e^{t}$, per cui

$$\begin{cases} 0=y(0)=-\frac{5}{4}+c_1+c_2 \\ 0=y'(0)=-4c_1+c_2 \end{cases}$$

Sottraendo la seconda dalla prima si ha

$$\begin{cases} 5c_1 = \dfrac{5}{4} \\ c_2 = 4\,c_1 \end{cases} \qquad \begin{cases} c_1 = \dfrac{1}{4} \\ c_2 = 1 \end{cases}$$

Otteniamo perciò la soluzione

$$y(t) = -\frac{5}{4} + \frac{1}{4}e^{-4t} + e^{t}$$

Analisi Matematica 2 (3 CFU) – A.A. 2002/03
Ingegneria Gestionale
Docente: Bruno Rubino – L'Aquila, 23 giugno 2003

Cognome e nome:______________________________

Matricola:____________________

Esercizio 1

Studiare il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{t(y^2+1)}{t^2+5} \\ \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Esercizio 2

Trovare l'integrale generale per l'equazione differenziale

$$y''' - y'' + y' = 1$$

Esercizio 3

Sia data la funzione $f:\ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{xy^2}{x^2+y^2}\right) & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Dire se f è continua e differenziabile.

Esercizio 4

Calcolare l'estremo superiore ed inferiore della funzione $f:\ \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = x,$$

dove $\mathcal{D} = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ e^{-y^2} + x^2 \leq 1\Big\}$.

Correzione prova scritta di Analisi Matematica 2 (3 CFU) per INGEGNERIA GESTIONALE – A.A. 2002/03, 23.6.03

ESERCIZIO 1 – L'equazione differenziale di tale problema di Cauchy è a variabili separabili. La funzione $f(t,y) = \frac{t(y^2+1)}{t^2+5}$ è $C^\infty(\mathbb{R}^2)$, per cui vale in particolare il Teorema di Cauchy di esistenza e unicità locale. Separando le variabili si ha

$$\int_0^{y(t)} \frac{dx}{x^2+1} = \int_0^t \frac{s\,ds}{s^2+5}$$

$$\operatorname{arctg}(y(t)) = \frac{1}{2}\log\left(\frac{5+t^2}{5}\right)$$

Poiché arctg è monotona e con immagine l'intervallo $(-\pi/2, \pi/2)$, si può invertire laddove

$$-\frac{\pi}{2} < \frac{1}{2}\log\left(\frac{5+t^2}{5}\right) < \frac{\pi}{2}$$

$$-\pi < \log(5+t^2) < \pi$$

$$e^{-\pi} < 5+t^2 < e^{\pi}$$

$$e^{-\pi}-5 < t^2 < e^{\pi}-5$$

e poichè $e^{-\pi}-5<0$, ciò vuol dire che $t^2 < e^{\pi}-5$,

da cui $-\sqrt{e^{\pi}-5} < t < \sqrt{e^{\pi}-5}$

e la soluzione è

$$y(t) = tg\left(\frac{1}{2}\log\left(1+\frac{t^2}{5}\right)\right)$$

ESERCIZIO 2 – Si tratta di un'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti del terzo ordine non omogenea.

L'omogenea associata è data da

$$y''' - y'' + y' = 0,$$

il cui polinomio caratteristico è dato da

$\lambda(\lambda^2 - \lambda + 1) = 0$, che ha per radici

$$\lambda = 0, \quad \lambda = \frac{1 \mp \sqrt{1-4}}{2} = \frac{1}{2} \mp i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Perciò la soluzione generale dell'equazione differenziale omogenea è

$$y(t) = c_1 + e^{t/2}\left(c_2 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + c_3 \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right)$$

Poichè $\lambda = 0$ è soluzione di molteplicità 1 per il polinomio caratteristico, cerco una soluzione della non omogenea del tipo $\bar{y}(t) = kt$. Sostituendo nell'equazione si ha $k = 1$.

Perciò la soluzione generale per l'equazione non omogenea è

$$y(t) = t + c_1 + e^{t/2}\left(c_2 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + c_3 \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right),$$

$c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.

ESERCIZIO 3 — Continuità e differenziabilità fuori dall'origine sono assicurate dal fatto che la funzione data è composizione di funzioni C^∞. Resta da verificare tali proprietà nell'origine. Si ha

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \operatorname{arctg}\left(\frac{xy^2}{x^2+y^2}\right) =$$

usando le coordinate polari $\begin{cases} x = \rho\cos\vartheta & \rho \geq 0 \\ y = \rho\,\mathrm{sen}\,\vartheta & \vartheta \in [0, 2\pi) \end{cases}$,

$$= \lim_{\rho\to 0^+} \operatorname{arctg}\left(\rho\cos\vartheta\,\mathrm{sen}^2\vartheta\right) = 0 = f(0,0).$$

visto che l'argomento di arctg è il prodotto di ρ (che tende a zero) per una funzione limitata (in valore assoluto minore di 1).

La f è perciò continua anche nell'origine.

Calcoliamo ora le derivate parziali nell'origine. Si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0-0}{t} = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0-0}{t} = 0.$$

Si ha perciò

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k)-f(0,0)-\langle \nabla f(0,0), (h,k)\rangle}{\sqrt{h^2+k^2}} =$$

$$= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\operatorname{arctg}\left(\frac{hk^2}{h^2+k^2}\right)}{\sqrt{h^2+k^2}}$$ e usando le coordinate polari analogamente a quanto

fatto prima, $\begin{cases} h = \rho\cos\vartheta & \rho \geq 0 \\ k = \rho\,\mathrm{sen}\,\vartheta & \vartheta \in [0, 2\pi) \end{cases}$, si ha

$$= \lim_{\rho\to 0^+} \frac{\mathrm{arctg}\,(\rho\cos\vartheta\,\mathrm{sen}^2\vartheta)}{\rho} = \cos\vartheta\,\mathrm{sen}^2\vartheta,$$

limite che dipende perciò da ϑ.
Per essere differenziabile nell'origine tale limite avrebbe dovuto essere zero.
Perciò f è continua su tutto $\mathbb{R}^2$ e differenziabile su $\mathbb{R}^2$ ad eccezione dell'origine.

ESERCIZIO 4 — Il dominio $\mathcal{D}$, sebbene non sia un insieme tra quelli noti dalla geometria, è facilmente rappresentabile (in modo approssimato). Tale insieme risulta simmetrico sia rispetto ad x (per ogni y fissato) sia rispetto ad y (per ogni x fissato). D'altra parte non è necessario disegnare $\mathcal{D}$, visto che

1) $e^{-y^2} > 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}$,
2) $\lim_{y\to\mp\infty} e^{-y^2} = 0$.

Sulla frontiera di $\mathcal{D}$, quando $y \to \mp\infty$, si ha $x^2 \longrightarrow 1$, ovvero:

$$\inf_{\mathcal{D}} f(x,y) = -1, \quad \sup_{\mathcal{D}} f(x,y) = +1.$$

Tali valori non vengono raggiunti per cui non sono minimo e massimo assoluto.

Analisi Matematica 2 (3 CFU) – A.A. 2002/03
Ingegneria Gestionale
Docente: Bruno Rubino – L'Aquila, 23 luglio 2003

Cognome e nome:______________________________

Matricola:____________________

Esercizio 1

Trovare l'integrale generale $y(t)$ per l'equazione differenziale

$$y^{(4)} + 3y'' + 2y = t$$

Esercizio 2

Calcolare, se ció ha senso, il massimo e minimo assoluto della funzione $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x, y) = x - \log\left(x^2 + y^2\right),$$

dove $\mathcal{D} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\right\}$.

Esercizio 3

Studiare il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = (y^2 + 1)\sin t \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Esercizio 4

Sia data la funzione $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x, y) = \begin{cases} x - \log\left(x^2 + y^2\right) & \text{se } (x, y) \neq (0, 0), \\ \frac{3}{2} & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Stabilire se esistono massimi e minimi relativi della f su $\mathbb{R}^2$. Calcolare poi l'estremo superiore e inferiore della f su $\mathbb{R}^2$.

Correzione prova scritta di Analisi Matematica 2 (3 CFU) per INGEGNERIA GESTIONALE – A. A. 2002/03, 23.7.03

ESERCIZIO 1 — Si tratta di un'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti del quarto ordine non omogenea. Consideriamo per prima cosa l'equazione differenziale omogenea associata, $y^{IV}+3y''+2y=0$, il cui polinomio caratteristico è dato da

$\lambda^4+3\lambda^2+2=0$. Detto $\mu=\lambda^2$, si ha

$\mu^2+3\mu+2=0$, da cui $\mu_1=-1$, $\mu_2=-2$.

Perciò

a) $\lambda^2=-1$, da cui $\lambda=\mp i$;

b) $\lambda^2=-2$, da cui $\lambda=\pm\sqrt{2}\,i$.

La soluzione generale dell'equazione differenziale omogenea è perciò:

$$y(t)=c_1\,\mathrm{sen}\,t+c_2\cos t+c_3\,\mathrm{sen}(\sqrt{2}\,t)+c_4\cos(\sqrt{2}\,t).$$

Poichè poi $\lambda=0$ non è soluzione del polinomio caratteristico, una soluzione per l'equazione differenziale non omogenea è data da $\bar{y}(t)=k_1t+k_2$, da cui sostituendo

$2k_1t+2k_2=t$, da cui $k_2=0$, $k_1=\frac{1}{2}$

Perciò l'integrale generale dell'equazione differenziale non omogenea di partenza è dato da

$$y(t)=\frac{1}{2}t+c_1\,\mathrm{sen}\,t+c_2\cos t+c_3\,\mathrm{sen}(\sqrt{2}\,t)+c_4\cos(\sqrt{2}\,t),$$

$c_k\in\mathbb{R}$, $k=1,2,3,4$.

ESERCIZIO 2 – Il dominio D è la corona circolare centrata nell'origine di raggio interno $r=1$ e quello esterno $R=2$. Si tratta di un dominio chiuso e limitato.

La funzione f è ben definita e continua su D. Per il teorema di Weierstrass esistono il minimo e il massimo assoluto.

Stabiliamo per prima cosa i punti stazionari interni.

$$\begin{cases} f_x = 1 - \dfrac{2x}{x^2+y^2} = 0 \\ f_y = -\dfrac{2y}{x^2+y^2} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y=0 \\ 1-\dfrac{2}{x}=0 \end{cases}$$

$A=(2,0)$, punto che non sta all'interno di D (sta sulla frontiera). Non vi sono punti stazionari interni. Esaminiamo la frontiera:

a) $C_1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2=1\}$,

$f_{|C_1}=x$, e su C_1 si ha perciò

$$\min_{C_1} f=-1, \quad \max_{C_1} f=+1$$

b) $C_2=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2=4\}$,

$f_{|C_2}=x-2\log 2$, e su C_2 si ha perciò

$$\max_{C_2} f=2-2\log 2, \quad \min_{C_2} f=-2-2\log 2.$$

Confrontando i valori trovati si ha

$$\min_D f = -2-2\log 2, \quad \max_D f = 1.$$

ESERCIZIO 3 - L'equazione differenziale del problema di Cauchy è a variabili separabili. La funzione $f(t,y)=(y^2+1)\,\text{sen}\,t$ è $C^\infty(\mathbb{R}^2)$, per cui in particolare vi è esistenza e unicità locale di soluzione.

Separando le variabili e integrando si ha

$$\int_0^{y(t)} \frac{d\xi}{\xi^2+1} = \int_0^t \text{sen}\, s\, ds \, , \quad \text{da cui}$$

$$\text{arctg}(y(t)) = -\cos s \Big|_{s=0}^{s=t} = 1-\cos t$$

La funzione arctg è monotona e il suo codominio è dato da $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$. Possiamo invertire ottenendo

$$y(t) = \text{tg}\left(1-\cos t\right) \quad \text{purchè} \quad -\frac{\pi}{2} < 1-\cos t < \frac{\pi}{2},$$

$$1-\frac{\pi}{2} < \cos t < 1+\frac{\pi}{2} \quad \text{ovvero} \quad \cos t > 1-\frac{\pi}{2},$$

da cui

$$-\bar{t} \doteq -\arccos\left(1-\frac{\pi}{2}\right) < t < \arccos\left(1-\frac{\pi}{2}\right) \doteq \bar{t}$$

Si ha in particolare (la soluzione è pari)

$$\lim_{t\to -\bar{t}^-} y(t) = +\infty, \quad \lim_{t\to \bar{t}^+} y(t) = +\infty.$$

ESERCIZIO 4 — La funzione f è ben definita su tutto $\mathbb{R}^2$.
Risulta

$$\begin{cases} f_x = 1 - \dfrac{2x}{x^2+y^2} = 0 \\ f_y = -\dfrac{2y}{x^2+y^2} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y=0 \\ 1-\dfrac{2}{x}=0 \end{cases} \qquad A=(2,0)$$

Si ha poi

$$f_{xx} = -\frac{2(x^2+y^2)-4x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f_{xy} = \frac{4xy}{(x^2+y^2)^2}, \quad f_{yy} = -\frac{2(x^2+y^2)-4y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

Risulta quindi

$$H_f(A) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

A è perciò un punto di sella.

Non vi sono perciò massimi e minimi relativi per f.
Si osservi ora che:

a) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = +\infty$, per cui f non è continua nell'origine e l'estremo superiore è $+\infty$.

b) $\lim_{y\to+\infty} f(1,y) = -\infty$, per cui f l'estremo inferiore è $-\infty$.

Analisi Matematica 2 (3 CFU) – A.A. 2002/03
Ingegneria Gestionale
Docente: Bruno Rubino – L'Aquila, 1 settembre 2003

Cognome e nome:______________________________

Matricola:____________________

Esercizio 1

Studiare il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \sin t \sqrt{y} \\ \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Esercizio 2

Studiare il problema di Cauchy per $t \geq 0$

$$\begin{cases} y'' + \max(y, y') = 0 \\ \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

Esercizio 3

Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{(x,y)\to 0} \frac{x^2 - y^3}{y^2 + x^3}$$

Esercizio 4

Stabilire i punti critici della funzione $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = x^3 + 3x^2y + 3xy^2$$

e classificarli.

Correzione prova scritta di Analisi Matematica 2 (3 CFU) per INGEGNERIA GESTIONALE — A.A. 2002/03, 1.9.03.

ESERCIZIO 1 — Si tratta di un problema di Cauchy la cui equazione differenziale del primo ordine è a variabili separabili. La funzione $f(t,y) = \operatorname{sen} t \sqrt{y}$ è definita e continua in $\mathbb{R}_t \times [0,+\infty)$ ma $f_y(t,y) = \dfrac{\operatorname{sen} t}{2\sqrt{y}}$ tende a $+\infty$ per $y \to 0^+$. Non valgono perciò le ipotesi del teorema di Cauchy che assicura esistenza ed unicità locale.

Si osservi che $y(t) \equiv 0$ è soluzione del problema di Cauchy. Procediamo per separazione di variabili al fine di calcolare un'altra eventuale soluzione.

$$\int_0^{y(t)} \frac{d\xi}{\sqrt{\xi}} = \int_0^t \operatorname{sen} s \, ds$$

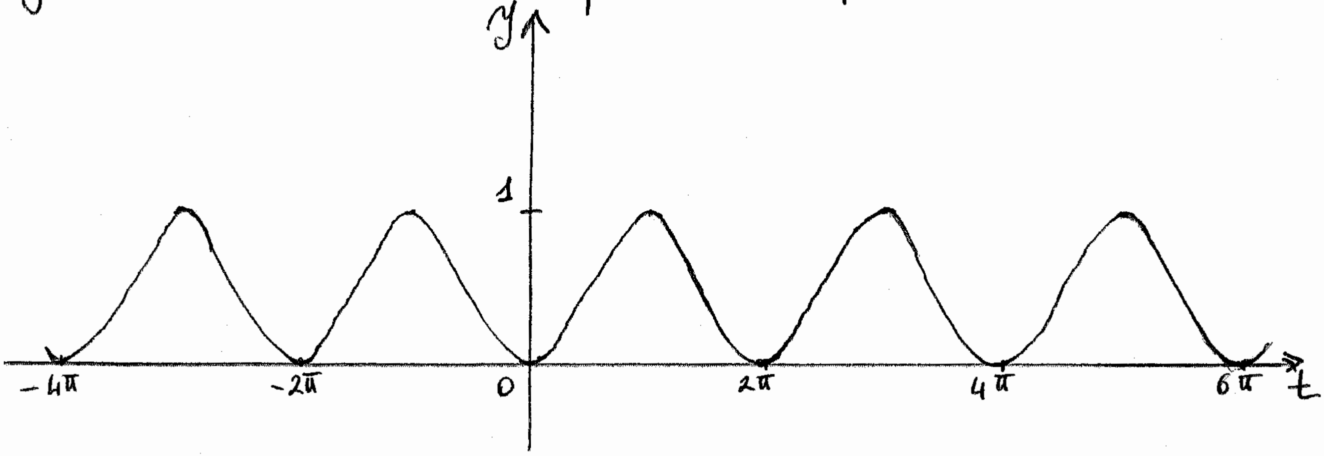
$$2\sqrt{y(t)} = -\cos t + 1 \geq 0 \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Perciò

$$y(t) = \frac{(1-\cos t)^2}{4}$$

Quella appena scritta è una seconda soluzione definita $\forall t \in \mathbb{R}$. La soluzione del problema di Cauchy proposto non è perciò univoca. Vi sono in realtà infinite soluzioni che si ottengono come funzioni definite su tutto $\mathbb{R}$ che si ottengono unendo in modo

C^1 tratti di funzione identicamente nulla con tratti della seconda soluzione (i punti in cui i due tipi di grafico si uniscono sono quelli del tipo $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$).



ESERCIZIO 2 – L'equazione differenziale del problema di Cauchy varia a seconda se $\max(y, y')$ è y oppure y'. In ogni caso però sarà un'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti del secondo ordine omogenea.

In un intorno di $t_0 = 0$ risulta $\max(y, y') = y$, visto che $y(0) = 1 > 0 = y'(0)$ e per continuità così accade in un intorno.

Perciò l'equazione è $y'' + y = 0$, la cui soluzione generale è $y(t) = c_1 \operatorname{sen} t + c_2 \cos t$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Perciò $y'(t) = c_1 \cos t - c_2 \operatorname{sen} t$, e imponendo le condizioni iniziali

$$\begin{cases} 0 = y'(0) = c_1 \\ 1 = y(0) = c_2 \end{cases}$$

si ottiene la soluzione $y(t) = \cos(t)$.

Poichè si ha di conseguenza $y'(t) = -\operatorname{sen} t$,

$$\max(y(t), y'(t)) = \max(\cos t, -\operatorname{sen} t).$$

Risulta $\cos t > -\operatorname{sen} t$ per $-\frac{\pi}{4}+2k\pi < t < \frac{3}{4}\pi+2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, e otteniamo perciò che la soluzione $y(t) = \cos(t)$ è valida per $-\frac{\pi}{4} < t \leq \frac{3}{4}\pi$.

Per $t > \frac{3}{4}\pi$, dobbiamo risolvere il problema

$$\begin{cases} y'' + y' = 0, & t > \frac{3}{4}\pi \\ y\left(\frac{3}{4}\pi\right) = y'\left(\frac{3}{4}\pi\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Il polinomio caratteristico associato all'equazione differenziale è

$$\lambda(\lambda+1) = 0, \quad \text{da cui } \lambda_1 = 0, \ \lambda_2 = -1.$$

L'integrale generale è

$$y(t) = c_1 + c_2 e^{-t}, \quad \text{da cui } y'(t) = -c_2 e^{-t}$$

e imponendo le condizioni iniziali

$$\begin{cases} -\frac{\sqrt{2}}{2} = y\left(\frac{3}{4}\pi\right) = c_1 + c_2 e^{-\frac{3}{4}\pi} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} = y'\left(\frac{3}{4}\pi\right) = -c_2 e^{-\frac{3}{4}\pi} \end{cases} \qquad \begin{cases} c_1 = -\sqrt{2} \\ c_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{3}{4}\pi} \end{cases}$$

ovvero

$$y(t) = -\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{3}{4}\pi - t},$$

$$y'(t) = -\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3}{4}\pi - t}$$

Si osserva che $\forall t > \frac{3}{4}\pi$ risulta $y'(t) > y(t)$,
$-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3}{4}\pi - t} > -\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3}{4}\pi - t}$, ovvero
$-\sqrt{2}e^{\frac{3}{4}\pi - t} > -\sqrt{2}$, che equivale a $e^{\frac{3}{4}\pi - t} < 1$.

Il testo non ci richiede la risoluzione per $t < 0$, altrimenti si tratterebbe di studiare analogamente il problema per $t < -\frac{1}{4}\pi$.

Abbiamo perciò trovato che la soluzione del nostro problema è:

$$y(t) = \begin{cases} \cos(t) & \text{per } 0 \leq t \leq \frac{3}{4}\pi \\ -\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3}{4}\pi - t} & \text{per } t > \frac{3}{4}\pi. \end{cases}$$

ESERCIZIO 3 – Il limite proposto non esiste. Basta infatti restringerlo ai due assi principali per ritrovare due valori differenti:

a) sull'asse $(x,0)$, $x \in \mathbb{R}$ si ha

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x^2}{x^3} = +\infty, \quad \lim_{x \to 0^-} \frac{x^2}{x^3} = -\infty$$

e ciò basta a concludere la non esistenza del limite;

b) sull'asse $(0,y)$, $y \in \mathbb{R}$ si ha poi
$\lim_{y \to 0} \frac{-y^3}{y^2} = 0$ (conto comunque superfluo).

ESERCIZIO 4 – La funzione f è polinomiale e perciò $C^\infty(\mathbb{R}^2)$. Per individuare i punti stazionari si ha

$$\begin{cases} f_x = 3x^2 + 6xy + 3y^2 = 0 \\ f_y = 3x^2 + 6xy = 0, \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} (x+y)^2 = 0 \\ x(x+2y) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y = 0 \\ x(x+2y) = 0 \end{cases}$$

$O = (0,0)$ è l'unica soluzione del sistema.
Si ha poi

$$f_{xx} = 6x + 6y, \quad f_{xy} = 6x + 6y, \quad f_{yy} = 6x$$

e si ha $H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ matrice semidefinita sia positiva che negativa (visto che è nulla), per cui tale matrice non ci è utile per stabilire la natura

dell'origine.
D'altra parte, lungo l'asse $(x,0)$ la funzione si riduce a
$$f(x,0) = x^3$$
e si ha $f(x,0) < 0$ per $x<0$ e $f(x,0) > 0$ per $x>0$.
Perciò $O=(0,0)$ è, per definizione, un punto di sella.

Analisi Matematica 2 (3 CFU) – A.A. 2002/03
Ingegneria Gestionale

Docente: Bruno Rubino – L'Aquila, 15 settembre 2003

Cognome e nome:______________________________

Matricola:______________________

Esercizio 1

Studiare il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = (y^2+1)\, te^{t^2} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

stabilendo in particolare se c'è esistenza ed unicità. Tracciare un grafico approssimativo delle eventuali soluzioni.

Esercizio 2

Trovare l'integrale generale per l'equazione differenziale

$$y''' + y' = \pi$$

Esercizio 3

Stabilire i punti critici della funzione $f:\ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = e^{x^2+y^2}\left(x^2-y^2\right)$$

e classificarli.

Esercizio 4

Sia data la funzione $f:\ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin^2(x)\ \sin\left(y^2\right)}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Dire se f è continua e differenziabile.

Correzione prova scritta di Analisi Matematica 2 (3 CFU) per INGEGNERIA GESTIONALE – A.A. 2002/03, 15.9.03.

ESERCIZIO 1 – Il problema di Cauchy ammette esistenza e unicità locale in base al Teorema di Cauchy in quanto il secondo membro dell'equazione differenziale a variabili separabili, $f(t,y)=(y^2+1)\,t\,e^{t^2}$, è $C^\infty(\mathbb{R}^2)$.

Separando le variabili e integrando si ha

$$\int_0^{y(t)} \frac{ds}{s^2+1} = \int_0^t s\,e^{s^2}\,ds$$

$$\operatorname{arctg}(y(t)) = \frac{1}{2}e^{s^2}\Big|_{s=0}^{s=t} = \frac{1}{2}\left(e^{t^2}-1\right)$$

Poichè arctg ha codominio $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, dobbiamo imporre

$$-\frac{\pi}{2} < \frac{1}{2}\left(e^{t^2}-1\right) < \frac{\pi}{2}\ ,$$ da cui

$1-\pi < e^{t^2} < 1+\pi$ e per la monotonia dell'esponenziale, tenuto inoltre conto del fatto che $e^{t^2}>0\ \forall t\in\mathbb{R}$, si ha $t^2 < \log(1+\pi)$, ovvero $-\sqrt{\log(1+\pi)} < t < \sqrt{\log(1+\pi)}$.

In tale intervallo, invertendo la funzione arctg (monotona) si ha

$$y(t) = \operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\left(e^{t^2} - 1\right)\right)$$

Tale soluzione è pari e agli estremi dell'intervallo massimale di definizione si ha

$$\lim_{t \to \left(-\sqrt{\log(1+\pi)}\right)^+} y(t) = +\infty = \lim_{t \to \left(\sqrt{\log(1+\pi)}\right)^-} y(t).$$

ESERCIZIO 2 — Si tratta di un'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti del terzo ordine non omogenea. L'omogenea associata, $y''' + y' = 0$, ha polinomio caratteristico dato da $\lambda^3 + \lambda = 0$, le cui soluzioni sono $\lambda = 0$, $\lambda = -i$, $\lambda = i$, tutte di molteplicità uno. La soluzione generale dell'omogenea associata è perciò

$$y(t) = c_1 + c_2 \cos t + c_3 \operatorname{sen} t, \quad c_k \in \mathbb{R},\ k = 1, 2, 3.$$

Poiché $\lambda = 0$ è radice di molteplicità uno per il polinomio caratteristico, cerco una soluzione particolare per la non omogenea della forma $\bar{y}(t) = \alpha t$ e sostituendo si ha $\alpha = \pi$.

Perciò l'integrale generale dell'equazione differenziale di partenza è dato da

$$y(t) = \pi t + c_1 + c_2 \cos t + c_3 \operatorname{sen} t, \quad c_k \in \mathbb{R},\ k = 1, 2, 3.$$

ESERCIZIO 3 – La funzione è di classe $C^\infty(\mathbb{R}^2)$.

Si ha

$$\begin{cases} f_x = (2x + 2x^3 - 2xy^2)e^{x^2+y^2} = 0 \\ f_y = (-2y + 2yx^2 - 2y^3)e^{x^2+y^2} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x(1+x^2-y^2) = 0 \\ 2y(1-x^2+y^2) = 0 \end{cases}$$

$O=(0,0)$ è l'unica soluzione.

Risulta poi

$$f_{xx} = (2+6x^2-2y^2+4x^2+4x^4-4x^2y^2)e^{x^2+y^2},$$

$$f_{xy} = (-4xy+4xy+4x^3y-4xy^3)e^{x^2+y^2},$$

$$f_{yy} = (-2+2x^2-6y^2-4y^2+4y^2x^2-4y^4)e^{x^2+y^2}$$

che calcolati in O danno luogo a

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

L'origine è perciò un punto di sella.

ESERCIZIO 4 – Come composizione di funzioni di classe $C^\infty(\mathbb{R}^2)$ la f è $C^\infty(\mathbb{R}^2)$ finché non si divide per una quantità infinitesima. L'unico punto in cui controllare continuità e differenziabilità è perciò l'origine.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}^2 x \operatorname{sen}(y^2)}{x^2+y^2} =$$ passando in coordinate polari

$$\begin{cases} x=\rho\cos\vartheta & \rho\geq 0, \\ y=\rho\operatorname{sen}\vartheta & \vartheta\in[0,2\pi) \end{cases}$$

$$= \lim_{\rho\to 0^+} \frac{\operatorname{sen}^2(\rho\cos\vartheta)\operatorname{sen}(\rho^2\operatorname{sen}^2\vartheta)}{\rho^2} =$$ tenuto conto del limite notevole $\lim_{t\to 0}\frac{\operatorname{sen}(\alpha t)}{t}=\alpha$

$$= \lim_{\rho\to 0^+} \operatorname{sen}^2(\rho\cos\vartheta)\operatorname{sen}^2\vartheta = 0$$

visto che $\lim_{t\to 0}\operatorname{sen}^2(\alpha t)=0$ mentre $\operatorname{sen}^2\vartheta\leq 1$.

Poichè $f(0,0)=0$, la continuità è assicurata.

Si ha poi

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{k\to 0}\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k} = 0,$$

per cui $$\lim_{(h,k)\to 0}\frac{f(h,k)-f(0,0)-\langle\nabla f(0,0),(h,k)\rangle}{\sqrt{h^2+k^2}} =$$

$$\lim_{(h,k)\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2(h)\operatorname{sen}(k^2)}{(h^2+k^2)^{3/2}} =$$

passando nuovamente in coordinate polari $\begin{cases} h = \rho\cos\vartheta & \vartheta \in [0, 2\pi) \\ k = \rho\operatorname{sen}\vartheta & \rho \geq 0 \end{cases}$

$$\lim_{\rho\to 0^+} \frac{\operatorname{sen}^2(\rho\cos\vartheta)}{\rho^2} \; \frac{\operatorname{sen}(\rho^2\operatorname{sen}^2\vartheta)}{\rho^2} \cdot \rho = 0,$$

visto che

$$\lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{sen}(\alpha t)}{t} = \alpha$$

La funzione f è perciò differenziabile.

Analisi Matematica 2 (3 CFU) – A.A. 2002/03
Ingegneria Gestionale
Docente: Bruno Rubino – L'Aquila, 1 dicembre 2003

Cognome e nome:____________________________

Matricola:____________________

Esercizio 1

Studiare il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = (y^2 - 1)\, te^{t^2} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

stabilendo in particolare se c'è esistenza ed unicità. Tracciare un grafico approssimativo delle eventuali soluzioni.

Esercizio 2

Trovare l'integrale generale per l'equazione differenziale

$$y'' - y = t^3 + te^t$$

Esercizio 3

Calcolare, se ciò ha senso, il massimo e il minimo assoluto della funzione

$$f(x, y) = x^2 + xy + y^2$$

sul dominio $\mathcal{D} = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 \geq 1\big\}$.

Esercizio 4

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^4}$$

Correzione prova scritta di Analisi Matematica 2 (3 CFU) per INGEGNERIA GESTIONALE — A.A. 2002/03, 1.12.03

ESERCIZIO 1 — L'equazione differenziale del problema di Cauchy è a variabili separabili. La funzione $f(t,y) = (y^2-1)\,t\,e^{t^2}$ è di classe $C^\infty(\mathbb{R}^2)$ per cui, in particolare, vale il ~~teorema~~ di Cauchy per il nostro problema e, in generale, per il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = (y^2-1)\,t\,e^{t^2} \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \qquad \forall (t_0, y_0) \in \mathbb{R}^2.$$

In particolare si osservi che per $y_0 = \mp 1$ la soluzione (unica) è $y(t) \equiv \mp 1 \quad \forall t \in \mathbb{R}$. Perciò le rette $y = \mp 1$ non possono essere attraversate né raggiunte dalle soluzione del nostro problema di Cauchy di partenza, vale a dire che risulterà

$$|y(t)| < 1 \quad \forall t \in I, \quad I \subseteq \mathbb{R} \text{ intervallo massimale}$$

di esistenza. Separando le variabili e integrando si ha

$$\int_0^{y(t)} \frac{ds}{s^2-1} = \int_0^t s\,e^{s^2}\,ds = \frac{1}{2}\left(e^{t^2}-1\right)$$

Poichè $\dfrac{1}{s^2-1} = \dfrac{1}{2}\,\dfrac{1}{s-1} - \dfrac{1}{2}\,\dfrac{1}{s+1}$, si ha

$$\frac{1}{2}\log\left(\left|\frac{s-1}{s+1}\right|\right)\Bigg|_{s=0}^{s=y(t)} = \frac{1}{2}\left(e^{t^2}-1\right)$$

$$\log\left(\frac{y(t)-1}{y(t)+1}(-1)\right) = e^{t^2}-1$$

Poichè il codominio di log è tutto $\mathbb{R}$ e log è monotona, invertendo si ha

$$\frac{1-y(t)}{1+y(t)} = \exp\left(e^{t^2}-1\right)$$

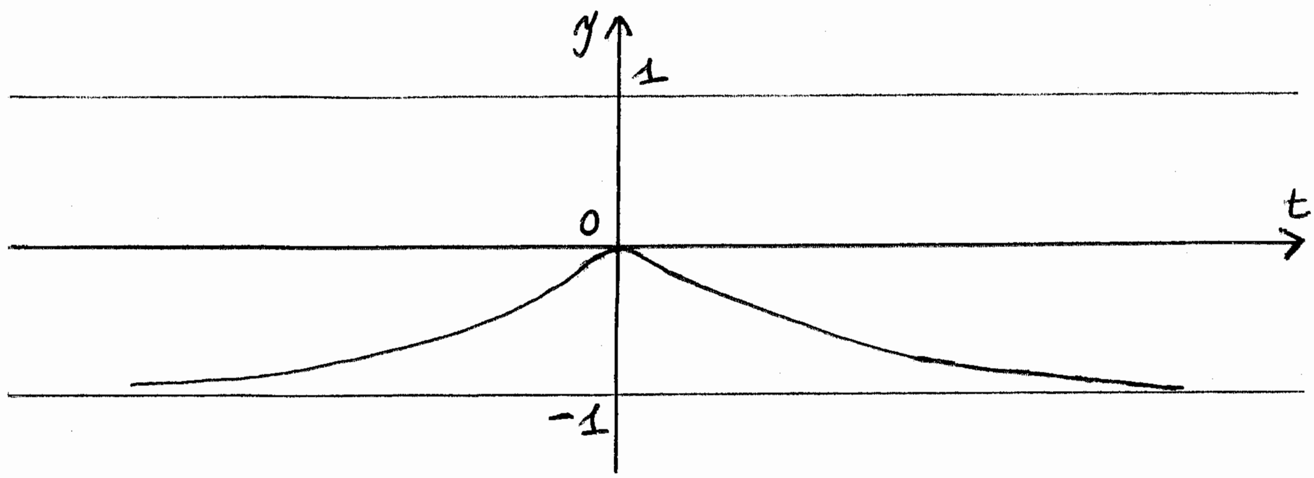
da cui

$$y(t) = \frac{1-\exp(e^{t^2}-1)}{1+\exp(e^{t^2}-1)} \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Si tratta di una funzione pari. Si ha $y(t) \geq 0$ per $1-\exp(e^{t^2}-1) \geq 0$, ovvero $\exp(e^{t^2}-1) \leq 1$, cioè $e^{t^2}-1 \leq 0 \iff e^{t^2} \leq 1$, vero con il segno di $=$ solo per $t=0$. Perciò $y(t) < 0 \quad \forall t \neq 0$.

Risulta poi $y' = (y^2-1)\,t\,e^{t^2} \geq 0$ per $t \leq 0$, visto che $y^2-1 < 0 \quad \forall t$.

Infine, $\lim_{t\to-\infty} y(t) = \lim_{t\to+\infty} y(t) = -1$. Il grafico approssimativo è perciò quello riportato in figura.



ESERCIZIO 2 – Si tratta di un'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti del secondo ordine non omogenea.

Il polinomio caratteristico dell'equazione differenziale omogenea associata è dato da $\lambda^2 - 1 = 0$, da cui $\lambda = \mp 1$. La soluzione generale per l'omogenea è perciò $y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{t}$.

Poichè $\lambda = 1$ è soluzione del polinomio caratteristico con molteplicità 1, $\lambda = 0$ non è soluzione del polinomio caratteristico, cerco una soluzione particolare dell'equazione non omogenea del tipo $\bar{y}(t) = \alpha + \beta t + \gamma t^2 + \delta t^3 + \varepsilon t^2 e^t + \eta t e^t$.

Risulta $\bar{y}''(t) = 2\gamma + 6\delta t + (2\varepsilon + 2\eta + 4\varepsilon t + \eta t + \varepsilon t^2) e^t$

e sostituendo si ha

$$-\alpha - \beta t - \gamma t^2 - \delta t^3 \cancel{- \varepsilon t^2 e^t} \cancel{- \eta t e^t} + 2\gamma + 6\delta t + (2\varepsilon + 2\eta + 4\varepsilon t + \cancel{\eta t} + \cancel{\varepsilon t^2}) e^t = t^3 + t e^t$$

da cui si ottiene il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} -\alpha+2\gamma=0 \\ -\beta+6\delta=0 \\ -\gamma=0 \\ -\delta=1 \\ 2\varepsilon+2\eta=0 \\ -\cancel{\eta}+4\varepsilon+\cancel{\eta}=1 \end{cases}$$

di sei equazioni in sei incognite.

$$\begin{cases} \alpha=0 \\ \beta=6\delta=-6 \\ \gamma=0 \\ \delta=-1 \\ \varepsilon=-\eta \\ \varepsilon=\frac{1}{4} \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha=0 \\ \beta=-6 \\ \gamma=0 \\ \delta=-1 \\ \varepsilon=\frac{1}{4} \\ \eta=-\frac{1}{4} \end{cases}$$

L'integrale generale dell'equazione non omogenea è perciò

$$y(t)=-6t-t^3+\frac{1}{4}t^2e^t-\frac{1}{4}te^t+c_1e^{-t}+c_2e^t,$$

$c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

ESERCIZIO 3 – La funzione $f\in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ in quanto polinomio in due variabili. Il dominio D è l'esterno del cerchio di centro l'origine e raggio 1. Non si può applicare il teorema di Weierstrass in

quanto D non è limitato.
Si osservi che lungo la retta $(x,0)$, $x\in\mathbb{R}$ si ha

$\lim_{x\to+\infty} f(x,0) = \lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$, per cui non

esiste il massimo assoluto e l'estremo superiore è $+\infty$.
Passando la funzione in coordinate polari si ottiene

$$\varphi(\rho,\vartheta) = f(\rho\cos\vartheta, \rho\,\mathrm{sen}\,\vartheta) = \rho^2 + \rho^2\cos\vartheta\,\mathrm{sen}\,\vartheta,$$

$$\begin{cases} x = \rho\cos\vartheta & \rho \geq 0 \\ y = \rho\,\mathrm{sen}\,\vartheta & \vartheta\in[0,2\pi) \end{cases}$$

Perciò $\varphi(\rho,\vartheta) = \left(1+\frac{1}{2}\mathrm{sen}(2\vartheta)\right)\rho^2$

Risulta $\min_{0\leq\vartheta<2\pi}\left(1+\frac{1}{2}\mathrm{sen}(2\vartheta)\right) = +\frac{1}{2}$,

per cui $\min_{\substack{\rho\geq 0\\ 0\leq\vartheta\leq 2\pi}} \varphi(\rho,\vartheta) = \frac{1}{2} = \varphi\left(1,\frac{3}{4}\pi\right)$

Perciò il minimo assoluto di f esiste e vale $\frac{1}{2}$.

ESERCIZIO 4 – Il limite proposto non esiste. Infatti, lungo la parabola $x = y^2$ si ha

$$\lim_{y \to 0} \frac{y^3}{2y^4} = \lim_{y \to 0} \frac{1}{2y}$$ che non esiste,

visto che $\lim_{y \to 0^+} \frac{1}{2y} = +\infty$, $\lim_{y \to 0^-} \frac{1}{2y} = -\infty$.

Analisi Matematica 2 (3 CFU) – A.A. 2002/03
Ingegneria Gestionale
Docente: Bruno Rubino – L'Aquila, 16 dicembre 2003

Cognome e nome:______________________________

Matricola:____________________

Esercizio 1

Studiare il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = e^{y-t^2} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

stabilendo in particolare se c'è esistenza ed unicità globale.

Suggerimento: può essere utile ricordare che $\int_0^{+\infty} e^{-s^2}\,ds = \sqrt{\pi}/2$

Esercizio 2

Trovare l'integrale generale per l'equazione differenziale

$$y^{\mathrm{V}} - 32y = 1.$$

Esercizio 3

Indicato con $\gamma_0 = \int_0^1 e^{t^2}\,dt$, calcolare, se ciò ha senso, il massimo e il minimo assoluto della funzione

$$f(x,y) = xye^{\int_0^{x^2} e^{t^2}\,dt}$$

sul quadrato $Q = [-1,1] \times [-1,1]$.

Esercizio 4

Sia data la funzione $f:\ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x,y) = x^2 - y.$$

Calcolare la derivata direzionale di f nel punto $P = (-1,3)$ nella direzione $v = (2,5)$.

Correzione prova scritta di Analisi Matematica 2 (3 CFU) per INGEGNERIA GESTIONALE – A.A. 2002/03, 16.12.03

ESERCIZIO 1 – L'equazione differenziale del problema di Cauchy considerato è a variabili separabili.
Poichè $f(t,y) = e^{y-t^2}$ è di classe $C^\infty(\mathbb{R}^2)$, vale in particolare il Teorema di Cauchy di esistenza e unicità locale. Separando le variabili si ha:

$$e^{-y} y' = e^{-t^2}$$

e integrando otteniamo $\displaystyle\int_0^{y(t)} e^{-s}\,ds = \int_0^t e^{-s^2}\,ds$,

da cui

$$-e^{-s}\Big|_{s=0}^{s=y(t)} = \int_0^t e^{-s^2}\,ds,$$

$$1 - e^{-y(t)} = \int_0^t e^{-s^2}\,ds, \quad \text{da cui} \quad e^{-y(t)} = 1 - \int_0^t e^{-s^2}\,ds$$

Poichè $e^{-y(t)} > 0$, deve essere $1 - \int_0^t e^{-s^2}\,ds > 0$

Tenuto conto che $\varphi(t) = \int_0^t e^{-s^2}\,ds$ è monotona strettamente crescente e $\lim_{t\to+\infty} f(t) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} < 1$, si ha

$1 - \int_0^t e^{-s^2}\,ds > 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$, per cui la soluzione del nostro problema è

$$y(t) = -\log\left(1 - \int_0^t e^{-s^2} ds\right), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

L'esistenza e unicità globale è perciò garantita.

ESERCIZIO 2 – Si tratta di una equazione differenziale lineare a coefficienti costanti del quinto ordine non omogenea.
L'omogenea associata, $y^V - 32y = 0$, ha polinomio caratteristico $\lambda^5 - 32 = 0$.
Sia $\lambda = \rho e^{i\vartheta}$ e sostituendo si ha $\rho^5 e^{5i\vartheta} = 2^5$, per cui $\rho = 2$, $5\vartheta = 2K\pi$, $\vartheta_K = \frac{2}{5}\pi K$, $K = -2, -1, 0, 1, 2$.

Poichè $\lambda = 0$ non è soluzione del polinomio caratteristico, cerco una soluzione particolare della non omogenea della forma $\bar{y}(t) = \alpha$ e sostituendo $-32\alpha = 1$, ovvero $\alpha = \frac{-1}{32}$
Riscriviamo le cinque soluzioni del polinomio caratteristico in forma algebrica:
$\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 2\left(\cos\left(\frac{2}{5}\pi\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{2}{5}\pi\right)\right)$, $\lambda_3 = \bar{\lambda}_2$,

$\lambda_4 = 2\left(\cos\left(\frac{4}{5}\pi\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{4}{5}\pi\right)\right)$, $\lambda_5 = \bar{\lambda}_4$.

Perciò l'integrale generale dell'equazione non omogenea è dato da

$$y(t) = e^{2\cos\left(\frac{2}{5}\pi\right)t}\left(c_1 \cos\left(2\,\mathrm{sen}\left(\tfrac{2}{5}\pi\right)t\right) + c_2\,\mathrm{sen}\left(2\,\mathrm{sen}\left(\tfrac{2}{5}\pi\right)t\right)\right) +$$

$$+ e^{2\cos\left(\frac{4}{5}\pi\right)t}\left(c_3 \cos\left(2\,\mathrm{sen}\left(\tfrac{4}{5}\pi\right)t\right) + c_4\,\mathrm{sen}\left(2\,\mathrm{sen}\left(\tfrac{4}{5}\pi\right)t\right)\right) +$$

$$+ c_5 e^{2t} - \frac{1}{32}$$

ESERCIZIO 3 — Il quadrato Q è chiuso e limitato mentre la funzione $f \in C^{\infty}(\mathbb{R}^2)$: vale in particolare il teorema di Weierstrass, per cui esistono massimo e minimo assoluto.

Risulta poi $f(x,y) = -f(-x,y) = -f(x,-y) = f(-x,-y)$.

Di conseguenza, basta stabilire il massimo assoluto di f nel quadrato $D = [0,1]\times[0,1]$.

Si ha

$$\begin{cases} f_x = \left(y + 2x^2 y e^{x^4}\right)\exp\left(\int_0^{x^2} e^{t^2}dt\right) = 0 \\ f_y = x\exp\left(\int_0^{x^2} e^{t^2}dt\right) = 0 \end{cases}$$

Dalla seconda si ha $x=0$ e sostituendo nella prima si ha $y=0$. Perciò l'unico punto stazionario è l'origine $(0,0)$.

Tale punto non è interno a D. Perciò massimo e minimo assoluti di f ristretta a D si trovano necessariamente sul bordo.

a) Per $x=0$, $0<y<1$, si ha

$\varphi_1(y) = f(0,y) = 0$, costante.

b) Per $y=0$, $0<x<1$, si ha

$\varphi_2(x) = f(x,0) = 0$, costante.

c) Per $x=1$, $0<y<1$, si ha

$\varphi_3(y) = f(1,y) = y\, e^{\gamma_0}$, $\varphi_3'(y) = e^{\gamma_0} > 0 \ \forall y$.

Non vi sono max e min interni all'intervallo.

d) Per $y=1$, $0<x<1$, si ha

$$\varphi_4(x) = f(x,1) = x\, e^{\int_0^{x^2} e^{t^2} dt},$$

$$\varphi_4'(x) = \left(1 + 2x\, e^{x^4}\right) e^{\int_0^{x^2} e^{t^2} dt} > 0 \text{ per } x \in (0,1),$$

per cui non vi sono max e min. interni all'intervallo.

Perciò min e max assoluti di f ristretta a D si trovano nei vertici del quadrato (punti singolari del dominio):

$f(0,0) = 0$, $f(0,1) = 0$, $f(1,0) = 0$, $f(1,1) = e^{\gamma_0}$.

Perciò, min e max assoluti di f ristretta a Q

sono rispettivamente

$$\min_{Q} f = -e^{\gamma_0}, \quad \max_{Q} f = +e^{\gamma_0}.$$

ESERCIZIO 4 – La $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ (in effetti, trattandosi di un polinomio, $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$).

Si ha

$f_x = 2x$, $f_y = -1$, per cui

$$\frac{\partial f}{\partial v}(P) = \left\langle \nabla f(P), \frac{v}{\|v\|} \right\rangle = \left\langle (-2,-1), \frac{(2,5)}{\sqrt{29}} \right\rangle =$$

$$= \frac{-4-5}{\sqrt{29}} = \frac{-9}{\sqrt{29}}$$

Analisi Matematica 2 (3 CFU) – A.A. 2002/03
Ingegneria Gestionale
Docente: Bruno Rubino – L'Aquila, 7 gennaio 2004

Cognome e nome:______________________________

Matricola:____________________

Esercizio 1

Studiare il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{\sqrt{1+t}}{t}\cos^2 y \\ \\ y(3) = 0 \end{cases}$$

Esercizio 2

Trovare l'integrale generale per l'equazione differenziale

$$8y''' - 36y'' + 54y' - 27y = 3e^t$$

Esercizio 3

Calcolare, se ciò ha senso, il massimo e il minimo assoluto della funzione

$$f(x,y) = x^2 + y^2$$

sul dominio

$$\mathcal{D} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ \frac{1}{36} \leq \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1\right\}$$

Esercizio 4

Sia data la funzione $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x,y,z) = x^2 - y^3 + z^4.$$

Calcolare la derivata direzionale di f nel punto $P = (1,2,3)$ nella direzione $v = (3,2,1)$.

Correzione prova scritta di Analisi Matematica 2 (3 CFU) per INGEGNERIA GESTIONALE - A.A. 2002/03, 7.1.04

ESERCIZIO 1 - L'equazione differenziale associata al problema è a variabili separabili e, almeno in un intorno del dato iniziale $(3,0)$, la funzione $f(t,y) = \frac{1}{t}\sqrt{1+t}\cos^2 y$ verifica le ipotesi del Teorema di Cauchy di esistenza e unicità locale.

Separando le variabili e integrando si ha

$$\int_0^{y(t)} \frac{ds}{\cos^2 s} = \int_3^t \frac{\sqrt{1+s}}{s}\, ds$$

Si tratta per prima cosa di trovare le primitive delle due funzioni integrande. Si ha

$$\int \frac{ds}{\cos^2 s} = tg(s) + k, \quad k \in \mathbb{R};$$

$\int \frac{\sqrt{1+s}}{s}\, ds =$ posto $\tau = \sqrt{1+s}$, $s = \tau^2 - 1$, $ds = 2\tau\, d\tau$, da cui

$$= \int \frac{2\tau^2 d\tau}{\tau^2 - 1} = 2\int\left(1 + \frac{1}{\tau^2-1}\right) d\tau =$$

$$= 2\int\left(1 + \frac{1}{2}\frac{1}{\tau-1} - \frac{1}{2}\frac{1}{\tau+1}\right) d\tau =$$

$$= 2\left(\tau + \frac{1}{2}\log\left|\frac{1-\tau}{1+\tau}\right|\right) + k =$$

$$= 2\left(\sqrt{1+s} + \frac{1}{2}\log\left|\frac{1-\sqrt{1+s}}{1+\sqrt{1+s}}\right|\right) + k, \ k \in \mathbb{R}.$$

Tornando all'integrazione della nostra funzione si ha, allora,

$$\operatorname{tg}(y(t)) = 2\left(\sqrt{1+t} - 2 + \frac{1}{2}\log\left(3\,\frac{\sqrt{1+t}-1}{\sqrt{1+t}+1}\right)\right)$$

Poichè la tangente è monotona per $y(t) \in \left(-\frac{\pi}{2}, \pi/2\right)$ e con codominio tutto $\mathbb{R}$, possiamo invertire nella precedente relazione ottenendo

$$y(t) = \operatorname{arctg}\left(2\sqrt{1+t} - 4 + \log\left(3\,\frac{\sqrt{1+t}-1}{\sqrt{1+t}+1}\right)\right)$$

con $t > 0$.

Si osservi che, poichè $f(t,y) \geq 0$, la $y = y(t)$ è monotona crescente e si ha

$$\lim_{t\to+\infty} y(t) = \pi/2 \quad , \quad \lim_{t\to 0^+} y(t) = -\frac{\pi}{2}$$

ESERCIZIO 2 – Si tratta di una equazione differenziale lineare a coefficienti costanti del terzo ordine non omogenea. Il polinomio caratteristico per l'equazione differenziale omogenea associata è dato da

$$8\lambda^3 - 36\lambda^2 + 54\lambda - 27 = 0.$$

Usando la regola di Ruffini,

	8	-36	54	-27
$\frac{3}{2}$		12	-36	27
	8	-24	18	/

Perciò $0 = 8\lambda^3 - 36\lambda^2 + 54\lambda - 27 =$

$$= \left(\lambda - \frac{3}{2}\right)\left(8\lambda^2 - 24\lambda + 18\right) = (2\lambda - 3)\left(4\lambda^2 - 12\lambda + 9\right) =$$

$$= (2\lambda - 3)^3$$

Dunque il polinomio caratteristico ha $\lambda = \frac{3}{2}$ come radice di molteplicità 3.

Inoltre, poichè $\lambda = 1$ non è radice del polinomio caratteristico, cerco una soluzione particolare dell'equazione non omogenea proprio del tipo $\bar{y}(t) = \alpha e^t$ e sostituendo nell'equazione si ha

$$8\alpha e^t - 36\alpha e^t + 54\alpha e^t - 27\alpha e^t = 3e^t,$$

da cui $-\alpha = 3$, ossia $\alpha = -3$

Perciò la soluzione generale dell'equazione non omogenea è data da

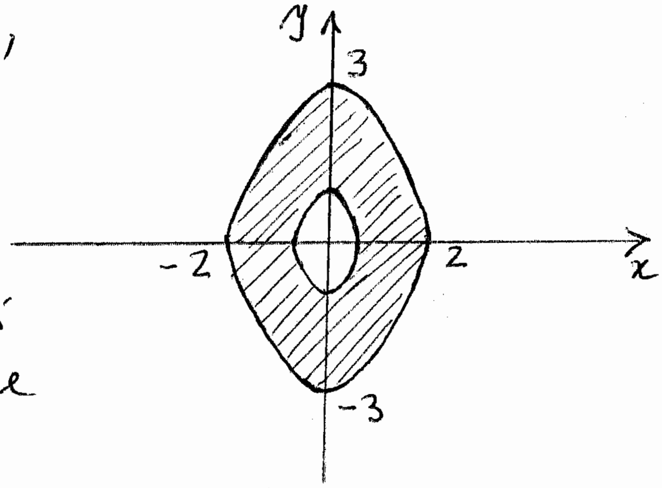
$$y(t) = -3e^t + c_1 e^{\frac{3}{2}t} + c_2 t e^{\frac{3}{2}t} + c_4 t^2 e^{\frac{3}{2}t},$$

$c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$

ESERCIZIO 3 – Il dominio D è la zona compresa tra le due ellissi rispettivamente di assi

i) $a_1 = 2$ e $b_1 = 3$,

ii) $a_2 = \frac{1}{3}$ e $b_2 = \frac{1}{2}$



Il dominio è perciò quello riportato in figura. Si tratta di un insieme chiuso e limitato; inoltre la funzione f è continua (in realtà C^∞ visto che è un polinomio): per il teorema di Weierstrass massimi e minimi assoluti sono assicurati.

Tenuto conto che le curve di livello $x^2 + y^2 = k$, al variare di $K \geq 0$, sono circonferenze di centro l'origine e raggio $\sqrt{K}$, si ha:

a) massimo assoluto nei punti $A = (0, 3)$ e $B = (0, -3)$, corrispondenti alla circonferenza di raggio $r = 3$, ossia $K = 9$ (circonferenza tangente esternamente);

b) minimo assoluto nei punti $C = (-\frac{1}{3}, 0)$ e $D = (\frac{1}{3}, 0)$, corrispondenti alla circonferenza di raggio $r = \frac{1}{3}$, ossia $K = \frac{1}{9}$ (circonferenza tangente internamente).

Le circonferenze di raggio $r < \frac{1}{3}$ ed $r > 3$ non intersecheranno più la regione (saranno totalmente interne ed esterne rispettivamente)

Perciò
$$\min_D f = \frac{1}{9}, \qquad \max_D f = 9.$$

ESERCIZIO 4 – Poichè la $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$,

detto $w = \frac{v}{\|v\|} = \left(\frac{3}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{1}{\sqrt{14}}\right)$,

si ha

$$\frac{\partial f}{\partial w}(P) = < \nabla f(P), w > .$$

Perciò, tenuto conto che

$$\nabla f(x,y,z) = (2x, -3y^2, 4z^3),$$

$$\frac{\partial f}{\partial w}(P) = < (2, -12, 108), \left(\frac{3}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{1}{\sqrt{14}}\right) > =$$

$$= \frac{6 - 24 + 108}{\sqrt{14}} = \frac{90}{\sqrt{14}} = \frac{45}{7}\sqrt{14}$$