Analisi Matematica II, Scritto A. Durata della prova: 2 ore 16.07.13

Firma: ....

Cognome: .... Nome: ....

Matricola: .... Corso di Laurea: ....

Esercizio 1 [10 punti]

Dato il luogo degli zeri
$$\sin(y - 2x^2) + \cos(x + 2y) - e^{x-2y} = 0,$$
dire se in un intorno dell'origine è possibile esplicitare una variabile in funzione dell'altra e, in caso affermativo, trovare tale esplicitazione fino al terzo ordine.

Esercizio 2 [10 punti]

Studiare il seguente problema di Cauchy: $\begin{cases} y' = 2\sin\left(\dfrac{t}{5}\right)\sqrt{25-y} \\ y(0) = 0. \end{cases}$

Esercizio 3 [10 punti]

Studiare la convergenza puntuale e uniforme della serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1-3i)^{2n}}{n^2} z^n$ per $z \in \mathbb{C}$.

Domanda 1 [3 punti]

Calcolo delle radici n-esime di un numero complesso.

Risposta

Domanda 2 [3 punti]

Calcolare i numeri complessi $z \in \mathbb{C}$ tali che $z^3 = -8i$.

Risposta

SOLUZIONI

Esercizio 1

Vogliamo applicare il teorema del Dini alla funzione
$$g(x,y) = \sin(y-2x^2) + \cos(x+2y) - e^{x-2y}$$

in un intorno del punto $(0,0)$.
Verifichiamo che sono soddisfatte le ipotesi del teorema:
i) $g \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$
ii) $g(0,0) = 0$
iii) $\frac{\partial g}{\partial y}(0,0) = \left[\cos(y-2x^2) - 2\sin(x+2y) + 2e^{x-2y}\right]_{|(0,0)} =$
$$= 1 + 2 = 3 \neq 0$$

Allora possiamo applicare il teorema del Dini e affermare che esiste un intorno I di 0 e un'unica funzione $f \in C^\infty(U,\mathbb{R})$ tale che
$$f(0) = 0 \quad e \quad g(x,f(x)) = 0 \quad \forall x \in U.$$

Vogliamo ora trovare lo sviluppo in serie di Mac-Laurin della funzione implicitamente definita $y = f(x)$, arrestandolo al 3° ordine.

Partiamo da $g(x,y) = 0$ e usiamo gli sviluppi noti delle funzioni seno, coseno ed esponenziale. Cerchiamo prima di tutto lo sviluppo al I ordine; formalmente esso è

$$y = f(x) = \underbrace{\cancel{f(0)}}_{=0} + f'(0)x + o(x) =$$
$$= f'(0)x + o(x)$$

Osserviamo che da questa espressione, passando agli o-piccoli segue subito che

$$o(y) = o(x).$$

Allora, tenuto conto di ciò, si ha

I ORDINE

$$y - 2x^2 + o(y-2x^2) + \cancel{1} + o(x+2y) - [\cancel{1} + x - 2y + o(x-2y)] = 0;$$

$$y + o(x) - x + 2y = 0;$$

$$y = \frac{x}{3} + o(x).$$

II ORDINE

$$y - 2x^2 + o(y-2x^2)^2 + \cancel{1} - \frac{1}{2}(x+2y)^2 + o(x+2y)^2 +$$
$$-[\cancel{1} + x - 2y + \frac{1}{2}(x-2y)^2 + o(x-2y)^2] = 0;$$

$$y - 2x^2 + o(x^2) - \frac{1}{2}x^2 - 2y^2 - \cancel{2xy} - x + 2y +$$
$$-\frac{1}{2}x^2 - 2y^2 + \cancel{2xy} = 0;$$

$$3y - 3x^2 - 4y^2 - x + o(x^2) = 0;$$

sostituisco lo sviluppo al 1° ordine nei termini di grado 2:

$$3y - 3x^2 - 4\left(\frac{x}{3} + o(x)\right)^2 - x + o(x^2) = 0;$$

$$3y - 3x^2 - \frac{4}{9}x^2 - x + o(x^2) = 0;$$

$$y = \frac{x}{3} + \frac{31}{27}x^2 + o(x^2)$$

III ORDINE

$$y-2x^2-\frac{1}{6}(y-2x^2)^3+o(y-2x^2)^3+\cancel{1}-\frac{1}{2}(x+2y)^2+$$

$$+o(x+2y)^3-\left[\cancel{1}+x-2y+\frac{1}{2}(x-2y)^2+\frac{1}{6}(x-2y)^3+\right.$$

$$\left.+o(x-2y)^3\right]=0;$$

$$y-2x^2-\frac{1}{6}y^3+o(x^3)-\frac{1}{2}x^2-2y^2-\cancel{2xy}+$$

$$-x+2y-\frac{1}{2}x^2-2y^2+\cancel{2xy}-\frac{1}{6}x^3+\frac{\cancel{8}^{4}}{\cancel{6}_{3}}y^3+x^2y-2xy^2=0;$$

$$3y-3x^2+\frac{7}{6}y^3-4y^2-x-\frac{1}{6}x^3+x^2y-2xy^2+o(x^3)=0;$$

poiché vogliamo uno sviluppo al 3° ordine, possiamo sostituire lo sviluppo al 1° ordine nei termini di grado 3 e lo sviluppo al 2° ordine nei termini di grado 2; si ha

$$3y-3x^2+\frac{7}{6}\left(\frac{x}{3}+o(x)\right)^3-4\left(\frac{x}{3}+\frac{31}{27}x^2+o(x^2)\right)^2-x+$$

$$-\frac{1}{6}x^3+x^2\left(\frac{x}{3}+o(x)\right)-2x\left(\frac{x}{3}+o(x)\right)^2+o(x^3)=0;$$

$$3y-3x^2+\frac{7}{162}x^3+o(x^3)-\frac{4}{9}x^2-\frac{248}{81}x^3-x+$$

$$-\frac{1}{6}x^3+\frac{x^3}{3}-\frac{2}{9}x^3=0;$$

$$3y-\frac{31}{9}x^2-\frac{83}{27}x^3-x+o(x^3)=0;$$

$$y=\frac{x}{3}+\frac{31}{27}x^2+\frac{83}{81}x^3+o(x^3).$$

Esercizio 2

La funzione $f(t,y) = 2\sin\left(\frac{t}{5}\right)\sqrt{25-y}$ è definita in $\mathbb{R} \times (-\infty, 25)$ e ivi continua. Inoltre essa è C^∞ in un intorno del dato iniziale $(0,0)$; pertanto per il teorema di Cauchy-Lipschitz il problema di Cauchy dato ammette un'unica soluzione in un intorno del dato iniziale.

L'eq. differenziale

$$y' = 2\sin\left(\frac{t}{5}\right)\sqrt{25-y}$$

possiede la sola soluzione stazionaria

$$y(t) \equiv 25$$

che però non è soluzione del nostro problema di Cauchy poiché non verifica la condizione iniziale.

Cerchiamo la soluzione con il metodo di separazione delle variabili

$$\int_0^{y(t)} \frac{d\xi}{2\sqrt{25-\xi}} = \int_0^t \sin\left(\frac{s}{5}\right) ds \;;$$

$$-\sqrt{25-y(t)} + \cancel{5} = -5\cos\frac{t}{5} + \cancel{5} \;;$$

(1) $$\sqrt{25-y(t)} = 5\cos\frac{t}{5} \;;$$

La precedente relazione è vera solo per i t tali che $\cos\frac{t}{5} \geq 0$, ovvero

$$\frac{t}{5} \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[-\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{\pi}{2}+2k\pi\right] ;$$

$$t \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[-\frac{5}{2}\pi+10k\pi, \frac{5}{2}\pi+10k\pi\right]$$

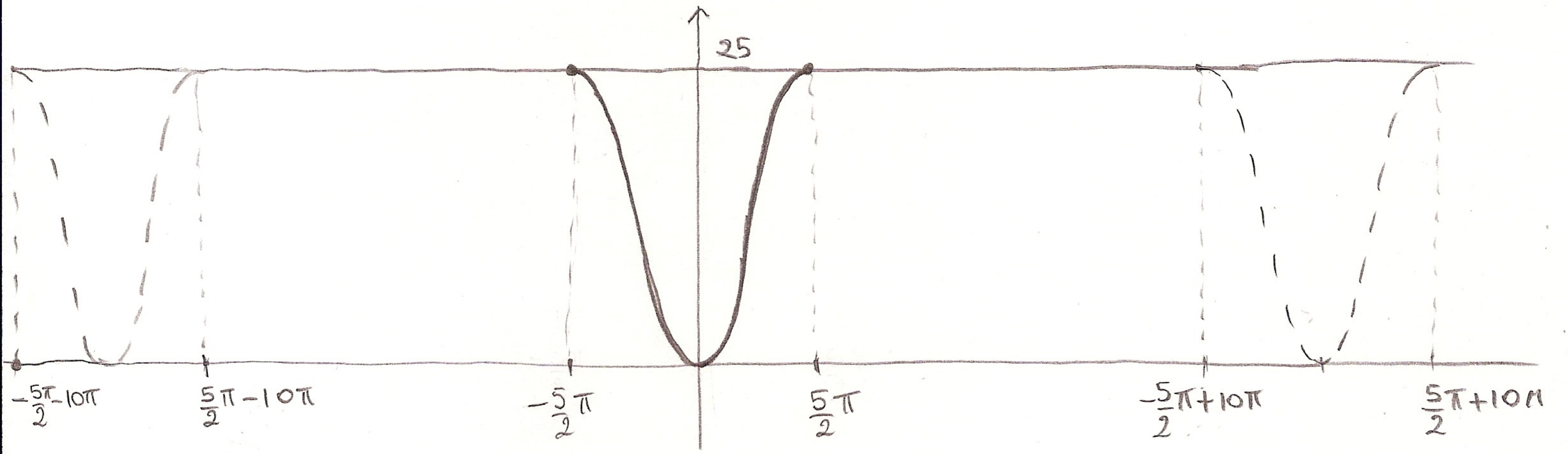
Restringiamoci ora all'intervallo $\left[-\frac{5}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi\right]$ che contiene l'origine (il nostro dato iniziale).

Dalla (1) elevando al quadrato si ha

$$25-y(t) = 25\cos^2\frac{t}{5} \qquad t\in\left[-\frac{5}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi\right]$$

$$y(t) = 25\sin^2\frac{t}{5} \qquad \text{per } t\in\left[-\frac{5}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi\right]$$

La soluzione $y(t) = 25\sin^2\frac{t}{5}$ ha come intervallo massimale $\left[-\frac{5}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi\right]$



La soluzione trovata può essere prolungata su tutto $\mathbb{R}$, "attaccandoci" la soluzione stazionaria $y(t)\equiv 25$
Si ottiene così la soluzione

$$y(t) = \begin{cases} 25\sin^2\frac{t}{5} & \text{per } t\in\left[-\frac{5}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi\right] \\ 25 & \text{per } t\notin\left[-\frac{5}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi\right] \end{cases}$$

Tale prolungamento non è unico.
Infatti la soluzione può essere prolungata in infiniti modi diversi unendo in modo C^1 tratti di funzione identicamente uguale a 25 con tratti di funzione $25 \sin^2 \frac{t}{5}$: i punti in cui i due tipi di grafico si uniscono sono quelli della forma $\pm \frac{5}{2}\pi + 10k\pi$.

Esercizio 3

Si tratta di una serie di potenze centrata in $(0,0)$.
Determiniamo il raggio di convergenza

$$r = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

Si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{(1-3i)^{2n}}{n^2}\right|} = |1-3i|^2 = 1+9 = 10.$$

Il raggio di convergenza è $r = \frac{1}{10}$

Possiamo già dire che la serie data converge puntualmente in tutti i punti del disco aperto di centro $(0,0)$ e raggio $\frac{1}{10}$, $\mathring{D}((0,0),\frac{1}{10})$;
converge totalmente (e quindi uniformemente) in tutti i compatti contenuti in $\mathring{D}((0,0),\frac{1}{10})$;
non converge in nessun punto $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{D((0,0),\frac{1}{10})}$

Studiamo il comportamento della serie sul bordo del disco.

Per ogni $z \in \overline{D((0,0), \frac{1}{10})}$ risulta $|z| \leq \frac{1}{10}$,

pertanto
$$\left| \frac{(1-3i)^{2n}}{n^2} z^n \right| = \frac{|1-3i|^{2n}}{n^2} \cdot |z|^n \leq$$

$$\leq \frac{\cancel{10^n}}{n^2} \cdot \frac{1}{\cancel{10^n}} = \frac{1}{n^2}$$

cioè il termine n-esimo della nostra serie di potenze nel disco $\overline{D((0,0), \frac{1}{10})}$ è in norma maggiorato da $\frac{1}{n^2}$ e la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ è convergente.

Quindi la nostra serie è totalmente (e quindi uniformemente) convergente su tutto il disco chiuso $\overline{D((0,0), \frac{1}{10})}$.

<u>Domanda 1</u>

Dato un numero complesso $w = re^{i\varphi}$ con $r > 0$, sappiamo che esso possiede n radici n-esime distinte.

Una qualunque radice n-esima di w è un numero complesso $z = \rho e^{i\vartheta}$ tale che

$$z^n = w$$

ovvero

$$\rho^n e^{in\vartheta} = re^{i\varphi},$$

da questa relazione segue che

$\rho^n = r \; ; \qquad n\vartheta = \varphi + 2k\pi \qquad k \in \mathbb{Z} \; ;$

$\rho = \sqrt[n]{r} \qquad \vartheta = \frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}$

Otteniamo così le n radici distinte

$$z_0 = \sqrt[n]{r}\, e^{i\varphi/n}$$

$$z_1 = \sqrt[n]{r}\, e^{i\left(\varphi/n + \frac{2\pi}{n}\right)}$$

$$\vdots$$

$$z_{n-1} = \sqrt[n]{r}\, e^{i\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi(n-1)}{n}\right)}$$

<u>Domanda 2</u>

In forma esponenziale si ha $-8i = 8e^{i\frac{3}{2}\pi}$

Quindi i numeri complessi $z = \rho e^{i\vartheta}$ t.c.

$$z^3 = \rho^3 e^{i3\vartheta} := 8e^{i\frac{3}{2}\pi}$$

sono

$$z_0 = 2e^{i\pi/2} = 2i$$

$$z_1 = 2e^{i\left(\pi/2 + \frac{2\pi}{3}\right)} = 2e^{i\frac{7}{6}\pi} = -\sqrt{3} - i$$

$$z_2 = 2e^{i\left(\pi/2 + \frac{4}{3}\pi\right)} = 2e^{i\frac{11}{6}\pi} = \sqrt{3} - i$$