Equazioni Differenziali alle Derivate Parziali del primo ordine semilineari

Analisi Matematica III
C. Lattanzio — B. Rubino

1 Teoria

Per equazione differenziale alle derivate parziali del primo ordine semilineare nelle variabili indipendenti $(x,t) \in \mathbb{R}^2$ si intende un'equazione della forma:

$$a(x,t)u_t + b(x,t)u_x = f(x,t,u), \tag{1.1}$$

dove la funzione incognita $u = u(x,t)$ è una funzione a valori reali. Le funzioni a, b, f sono funzioni regolari, ad esempio a, $b \in C^1(\Omega)$ e $f \in C^1(\Omega \times \mathbb{R})$, dove $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ è un aperto del piano (x,t). Una funzione u è *s*oluzione dell'equazione (1.1) in un aperto $U \subset \Omega$ se verifica tale equazione puntualmente in U.

Definiamo ora il problema di Cauchy per l'equazione (1.1). Sia $\mathcal{C}$ una curva regolare contenuta in Ω di equazioni parametriche $x = x_0(\sigma)$, $t = t_0(\sigma)$. Definiamo problema di Cauchy il seguente sistema:

$$\begin{cases} a(x,t)u_t + b(x,t)u_x = f(x,t,u) \\ u(x_0(\sigma), t_0(\sigma)) = u_0(\sigma) \end{cases} \tag{1.2}$$

e u è soluzione di (1.2) in un aperto $U \subset \Omega$ se verifica l'equazione differenziale puntualmente in U e il dato iniziale in ogni punto della curva $\mathcal{C}$ contenuto in U. Prima di discutere l'esistenza e l'unicità delle soluzioni di (1.2), vediamo come determinare tale soluzione in un esempio concreto.

Esempio 1.1 Consideriamo l'equazione differenziale alle derivate parziali

$$u_t + vu_x = 0, \tag{1.3}$$

dove $v > 0$ è una costante, a cui aggiungiamo una condizione iniziale

$$u(x,0) = u_0(x), \tag{1.4}$$

con u_0 funzione regolare. Associamo all'equazione differenziale (1.3) il seguente sistema di equazioni differenziali ordinarie:

$$\begin{cases} \dot{x}(s) = v \\ \dot{t}(s) = 1, \end{cases} \tag{1.5}$$

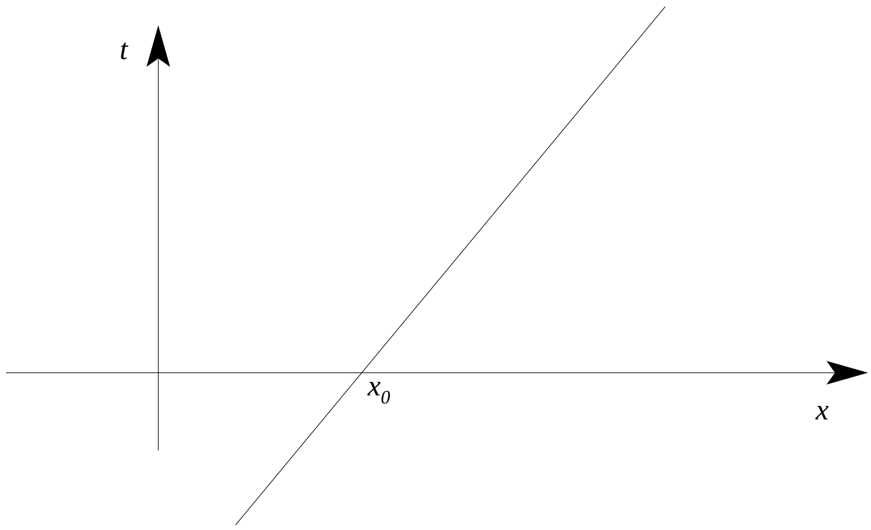

Figura 1: caratteristiche per l'equazione (1.3)

dove con "$\dot{}$" indichiamo la derivata rispetto al parametro s. Le curve soluzioni di (1.5) sono dette *curve caratteristiche* per (1.3). Tale soluzione è fornita chiaramente da:

$$\begin{cases} x(s) = vs + x_0 \\ t(s) = s + t_0, \end{cases}$$

che, scegliendo per comodità (rispetto alla curva $\{t = 0\}$ in cui è assegnato il dato iniziale (1.4)) $t_0 = 0$, si può riscrivere, eliminando il parametro s, come

$$x(t) = vt + x_0. \tag{1.6}$$

La (1.6) rappresenta pertanto la curva caratteristica che interseca in x_0 la curva $\{t = 0\}$ del dato iniziale. Tale curva risulta essere nel piano (x, t) una *retta* di pendenza $\frac{1}{v}$ o, equivalentemente, di *velocità* v (vedere Figura 1). Sia ora $\phi(t) = u(x(t), t)$ la soluzione di (1.3) calcolata lungo le caratteristiche (1.6). Dalla definizie di caratteristica (sistema (1.5)), si ha:

$$\dot{\phi}(t) = \dot{x}(t)u_x(x(t), t) + u_t(x(t), t) = vu_x(x(t), t) + u_t(x(t), t) = 0,$$

vale a dire, *la soluzione di (1.3) è costante lungo le caratteristiche (1.6)*. Quindi, si può risolvere l'equazione differenziale ordinaria per ϕ e si ha:

$$\phi(t) = \phi(0),$$

vale a dire

$$u(vt + x_0, t) = u(x(t), t) = u(x(0), 0) = u_0(x_0),$$

utilizzando la (1.6) e la condizione iniziale (1.4). Per determinare ora il valore della soluzione u in un punto generico (x, t) del piano, basta determinare il punto x_0 di intersezione tra la caratteristica passante per (x, t) e l'asse $\{t = 0\}$, cioè basta invertire la relazione $x = vt + x_0$ ottenendo

$$x_0 = x - vt.$$

In definitiva, la soluzione di (1.3)–(1.4) è data da

$$u(x, t) = u_0(x - vt),$$

come è a questo punto facile convincersi anche per verifica diretta. La soluzione al tempo t è pertanto ottenuta traslando il grafico della condizione iniziale u_0 della quantità vt: questa proprietà giustifica la definizione di *velocità* data alla quantità v. In altre parole, le caratteristiche trasportano le informazioni dal dato iniziale e le fanno viaggiare con velocità v (vedere Figura 2). ■

Nell'Esempio 1.1 abbiamo visto come è utile introdurre una opportuna famiglia di curve (le curve caratteristiche), che nel caso specifico risultano essere rette, lungo le quali l'equazione differenziale ha una formulazione più semplice, formulazione che permette di risolvere esplicitamente il problema di Cauchy (1.3)–(1.4) (nel caso esaminato, la soluzione risultava *costante* lungo le caratteristiche!!). In realtà, l'utilizzo delle curve caratteristiche permette, anche nel caso generale (1.2), di arrivare ad un teorema di esistenza e unicità delle soluzioni per tale problema di Cauchy. Definiamo allora *curve caratteristiche* per l'equazione

$$a(x, t)u_t + b(x, t)u_x = f(x, t, u) \tag{1.7}$$

le soluzioni del seguente sistema di equazioni differenziali ordinarie:

$$\begin{cases} \dot{x}(s) = b(x(s), t(s)) \\ \dot{t}(s) = a(x(s), t(s)). \end{cases} \tag{1.8}$$

Se calcoliamo la soluzione u di (1.7) lungo le soluzioni di (1.8), ossia consideriamo la funzione $\phi(s) = u(x(s), t(s))$, si ha:

$$\begin{aligned} \dot{\phi}(s) &= \dot{x}(s)u_x(x(s), t(s)) + \dot{t}(s)u_t(x(s), t(s)) \\ &= a(x(s), t(s))u_t(x(s), t(s)) + b(x(s), t(s))u_x(x(s), t(s)) \\ &= f(x(s), t(s), u(x(s), t(s))) \\ &= \psi(s, \phi(s)). \end{aligned}$$

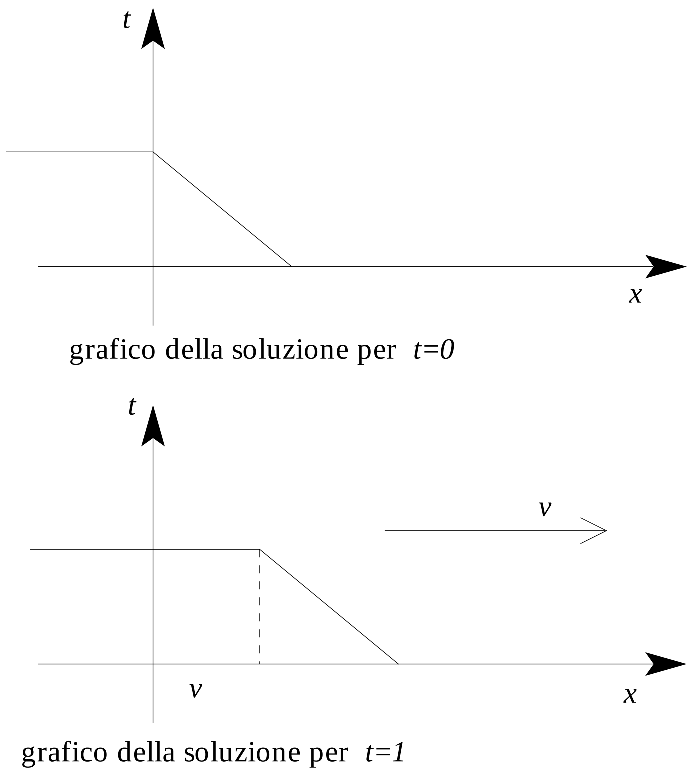

Figura 2: la soluzione di (1.3)–(1.4) "viaggia" con velocità v

Pertanto, lungo le caratteristiche, l'equazione alle derivate parziali (1.7) si riscrive come un'equazione differenziale ordinaria: le caratteristiche sono definite proprio in modo che il termine a sinistra in (1.7) diventi una derivata totale rispetto al parametro che descrive le caratteristiche stesse. Abbiamo quindi ridotto lo studio un'equazione alle derivate parziali allo studio di equazioni differenziali ordinarie e, mediante questo metodo, siamo in grado di determinare la soluzione dell'equazione (1.7), con dato iniziale

$$u(x_0(\sigma), t_0(\sigma)) = u_0(\sigma) \tag{1.9}$$

assegnato lungo una curva $\mathcal{C}$ (di equazioni parametriche $(x_0(\sigma), t_0(\sigma))$) regolare contenuta nel dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ di definizione del problema di Cauchy preso in considerazione. Come già osservato nell'Esempio 1.1, per far sì che questo metodo sia efficace, le caratteristiche devono poter "pescare" informazioni dalla curva del dato iniziale $\mathcal{C}$ e trasportarle in un aperto $U \subset \Omega$, nel quale otterremo la soluzione cercata. Pertanto, nel teorema di esistenza e unicità locali per (1.7)–(1.9), ci aspettiamo una condizione di compatibilità tra le caratteristiche dell'equazione (1.7) e la scelta della curva del dato iniziale $\mathcal{C}$. Più precisamente, è naturale richiedere che, in ogni punto della curva $\mathcal{C}$ nel quale vogliamo costruire la soluzione locale del problema di Cauchy, la curva caratteristica e la curva $\mathcal{C}$ siano trasversali, cioè non abbiano la stessa tangente. Questo risultato è stabilito dal teorema seguente.

Teorema 1.2 *Sia dato il problema di Cauchy (1.7)–(1.9) per* $(x,t) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$*, dove la curva iniziale* $\mathcal{C} \subset \Omega$ *è regolare e le funzioni* a*,* b*,* f *sono funzioni regolari delle loro variabili e tali che* $a(x,t)^2+b(x,t)^2 \neq 0$ *per ogni* $(x,t) \in \Omega$*. Sia* $(x_0,t_0) = (x_0(\sigma_0), t_0(\sigma_0)) \in \mathcal{C}$ *un punto della curva iniziale tale che* $\mathcal{C}$ non sia caratteristica *in* (x_0,t_0) *rispetto all'equazione, vale a dire:*

$$a(x_0,t_0)\, \frac{dx_0}{d\sigma}\bigg|_{\sigma=\sigma_0} - b(x_0,t_0)\, \frac{dt_0}{d\sigma}\bigg|_{\sigma=\sigma_0} \neq 0. \tag{1.10}$$

Allora esiste un aperto $U \subset \Omega$*, con* $(x_0,t_0) \in U$*, e un'unica soluzione* $u = u(x,t)$ *di (1.7)–(1.9), che verifica (1.7) in ogni* $(x,t) \in U$ *e (1.9) in ogni punto di* $\mathcal{C}$ *contenuto in* U*.*

Osservazione 1.3 Come abbiamo anticipato, per poter avere un risultato di esistenza e unicità per (1.7)–(1.9), è necessario avere una condizione di trasversalità tra le caratteristiche stesse e la curva del dato iniziale $\mathcal{C}$. Tale trasversalità è garantita dalla condizione (1.10) del Teorema 1.2. Infatti, il vettore $\tau = (b(x_0,t_0), a(x_0,t_0))$ rappresenta il vettore tangente alla caratteristica nel punto (x_0,t_0) (si veda la definizione delle caratteristiche tramite il sistema (1.8)), mentre il vettore $\nu_0 = \left(-\frac{dt_0}{d\sigma}\Big|_{\sigma=\sigma_0}, \frac{dx_0}{d\sigma}\Big|_{\sigma=\sigma_0} \right)$ è il vettore normale alla curva iniziale $\mathcal{C}$ nel punto (x_0,t_0), essendo ortogonale al vettore tangente a tale curva, vale a dire il vettore $T_0 = \left(\frac{dx_0}{d\sigma}\Big|_{\sigma=\sigma_0}, \frac{dt_0}{d\sigma}\Big|_{\sigma=\sigma_0} \right)$. Pertanto, la condizione (1.10) in termini di tali vettori diventa $\langle \tau, \nu_0 \rangle \neq 0$. In altre parole, *il vettore tangente alla caratteristica non è ortogonale alla normale alla curva del dato iniziale* $\mathcal{C}$ *in* (x_0,t_0), cioè *la caratteristica e la curva del dato iniziale* $\mathcal{C}$ *non hanno la stessa tangente in* (x_0,t_0) (vedere la Figura 3). ■

Esempio 1.4 Una classe di esempi fisicamente importanti è fornito dal seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} u_t + b(x,t)u_x = f(x,t,u) \\ u(x,0) = u_0(x), \end{cases} \tag{1.11}$$

cioè problemi di Cauchy con dato assegnato lungo la curva $\{t = 0\}$ per equazioni della forma (1.7) con $a(x,t) = 1$. In questo caso, l'asse delle x

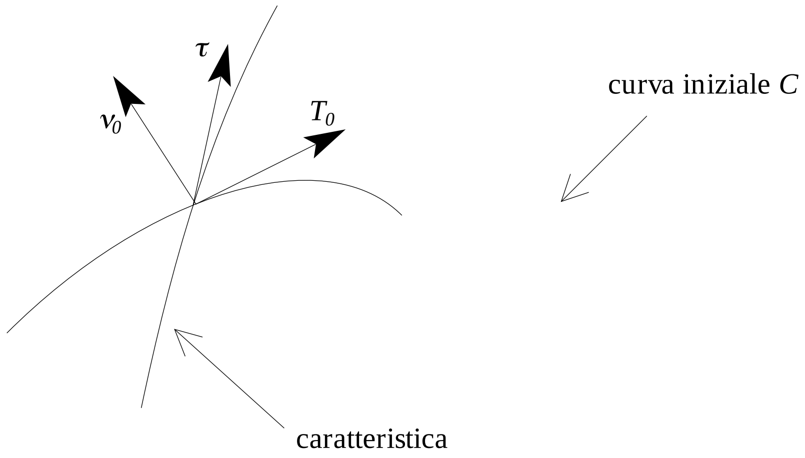

Figura 3: interpretazione geometrica della condizione (1.10)

non è caratteristico rispetto all'equazione considerata in ogni punto $(x_0, 0)$. Infatti, il vettore normale a tale curva è dato, in ogni punto, da $(0, 1)$ e pertanto la condizione (1.10) diventa:

$$1 \cdot 1 + b(x_0, 0) \cdot 0 = 1 \neq 0.$$

Osserviamo che lo stesso risultato si ottiene per equazioni con coefficiente $a(x, t) \neq 0$ (e non necessariamente uguale a 1), in quanto in questo caso (1.10) diventa:

$$a(x_0, 0) \cdot 1 + b(x_0, 0) \cdot 0 = a(x_0, 0) \neq 0,$$

ma, d'altra parte, tali equazioni si possono ricondurre alla forma (1.11) semplicemente dividento per $a(x, t)$. ■

2 Esercizi

Esercizio 2.1 *Determinare la soluzione del problema di Cauchy*

$$\begin{cases} u_t + tu_x = u \\ \\ u(x, 0) = x^2. \end{cases}$$

Risoluzione. Si tratta di una equazione alle derivate parziali in due variabili lineare del prim'ordine con dato di Cauchy. Ne cerchiamo la soluzione $u = u(x, t)$ con il metodo delle curve caratteristiche.

Le curve di tale equazione, una famiglia ad un parametro, sono definite dal sistema dinamico in $(x,t) = (x(s), t(s))$

$$\begin{cases} \dot{t} = 1 \\ \dot{x} = t, \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} t(s) = s \\ \dot{x}(t) = t, \end{cases}$$

la cui soluzione, in forma cartesiana, è data da

$$x(t) = \frac{t^2}{2} + x_0, \quad x_0 \in \mathbb{R}. \tag{2.1}$$

Si osservi (Figura 4) che tutte le caratteristiche intersecano $t = 0$ e quindi

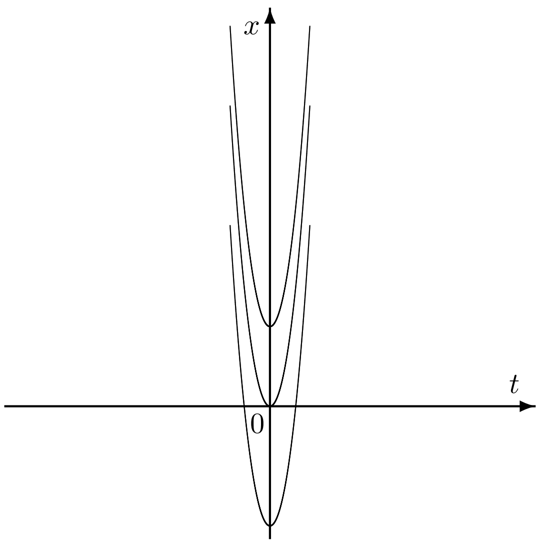

Figura 4: Curve caratteristiche dell'equazione alle derivate parziali dell'Esercizio 2.1

pescano il dato per propagarlo su tutto il piano. Si ha poi

$$\frac{d}{dt} u(x(t), t) = u(x(t), t),$$

da cui

$$u\left(\frac{t^2}{2} + x_0, t\right) = u(x_0, 0)e^t = x_0^2 e^t$$

e visto che dalla (2.1) si ha $x_0 = x_0(x,t) = x - \frac{t^2}{2}$, si ottiene

$$u(x,t) = \left(x - \frac{t^2}{2}\right)^2 e^t.$$

Lo studente diligente può verificare che tale $u = u(x,t)$ risolve effettivamente il problema di Cauchy proposto. ■

Esercizio 2.2 *Determinare la soluzione del problema di Cauchy*

$$\begin{cases} u_t + tu_x = x \\ \\ u(x,0) = x^2. \end{cases}$$

Risoluzione. Si tratta di una equazione alle derivate parziali in due variabili lineare del prim'ordine con dato di Cauchy. Ne cerchiamo la soluzione $u = u(x,t)$ con il metodo delle curve caratteristiche.
Le curve di tale equazione, una famiglia ad un parametro, sono definite dal sistema dinamico in $(x,t) = (x(s), t(s))$

$$\begin{cases} \dot{t} = 1 \\ \dot{x} = t, \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} t(s) = s \\ \dot{x}(t) = t, \end{cases}$$

la cui soluzione, in forma cartesiana, è data da

$$x(t) = \frac{t^2}{2} + x_0, \quad c \in \mathbb{R}. \tag{2.2}$$

Si osservi (Figura 5) che tutte le caratteristiche intersecano $t = 0$ e quindi *pescano* il dato per propagarlo su tutto il piano. Si ha poi

$$\frac{d}{dt}u(x(t), t) = x(t) = \frac{t^2}{2} + x_0,$$

da cui

$$u\left(\frac{t^2}{2} + x_0, t\right) = \frac{t^3}{6} + ct + u(x_0, 0) = \frac{t^3}{6} + ct + x_0^2$$

e visto che dalla (2.2) si ha $x_0 = x_0(x,t) = x - \frac{t^2}{2}$, si ottiene

$$u(x,t) = \frac{t^3}{6} + \left(x - \frac{t^2}{2}\right)t + \left(x - \frac{t^2}{2}\right)^2,$$

ovvero

$$u(x,t) = x^2 + xt - xt^2 - \frac{t^3}{3} + \frac{t^4}{4}.$$

Lo studente diligente può verificare che tale $u = u(x,t)$ risolve effettivamente il problema di Cauchy proposto. ■

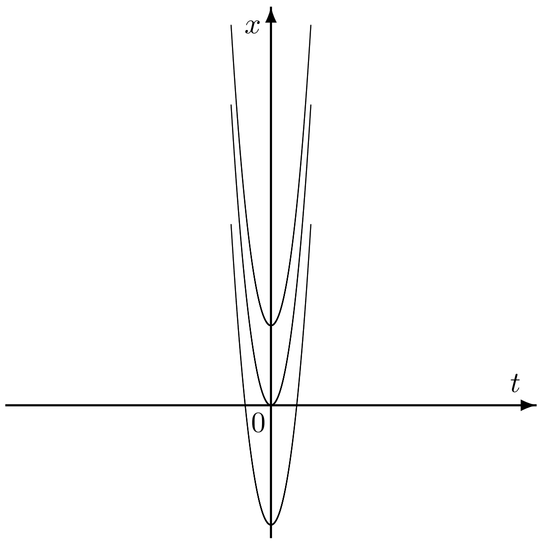

Figura 5: Curve caratteristiche dell'equazione alle derivate parziali dell'Esercizio 2.2

Esercizio 2.3 *Determinare la soluzione del problema di Cauchy*

$$\begin{cases} u_t + 2xtu_x = u \\ \\ u(x,0) = x. \end{cases}$$

Risoluzione. Si tratta di una equazione alle derivate parziali in due variabili lineare del prim'ordine con dato di Cauchy. Ne cerchiamo la soluzione $u = u(x,t)$ con il metodo delle curve caratteristiche.
Le curve caratteristiche di tale equazione, una famiglia ad un parametro, sono definite dal sistema dinamico in $(x,t) = (x(s), t(s))$

$$\begin{cases} \dot{t} = 1 \\ \dot{x} = 2xt, \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} t(s) = s \\ \dot{x}(t) = 2xt, \end{cases}$$

la cui soluzione, in forma cartesiana, è data da

$$x(t) = x_0 e^{t^2}, \quad x_0 \in \mathbb{R}. \tag{2.3}$$

Si osservi (Figura 6) che tutte le caratteristiche intersecano $t = 0$ e quindi *pescano* il dato per propagarlo su tutto il piano. Si ha poi

$$\frac{d}{dt} u(x(t), t) = u(x(t), t),$$

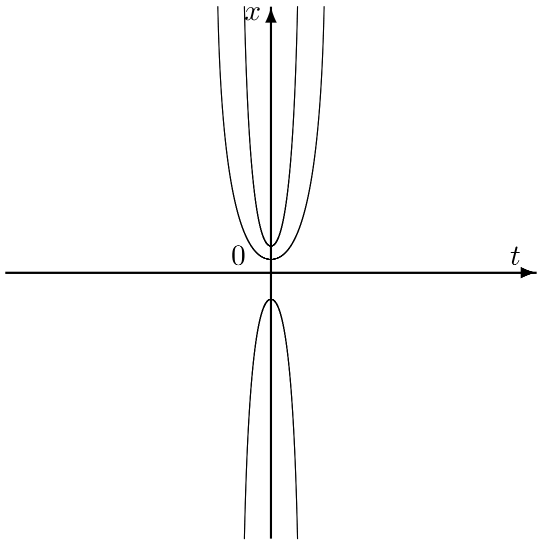

Figura 6: Curve caratteristiche dell'equazione alle derivate parziali dell'Esercizio 2.3

da cui

$$u\left(x_0e^{t^2},t\right) = u(x_0,0)e^t = x_0e^t$$

e visto che dalla (2.3) si ha $x_0 = x_0(x,t) = xe^{-t^2}$, si ottiene

$$u(x,t) = \left(xe^{-t^2}\right)e^t = xe^{t-t^2}.$$

Lo studente diligente può verificare che tale $u = u(x,t)$ risolve effettivamente il problema di Cauchy proposto. ■

Esercizio 2.4 *Determinare la soluzione del problema di Cauchy*

$$\begin{cases} u_t - xu_x = u + 1 \\ \\ u(x,0) = x. \end{cases}$$

Risoluzione. Si tratta di una equazione alle derivate parziali in due variabili lineare del prim'ordine con dato di Cauchy. Ne cerchiamo la soluzione $u = u(x,t)$ con il metodo delle curve caratteristiche.
Le curve caratteristiche di tale equazione, una famiglia ad un parametro, sono definite dal sistema dinamico in $(x,t) = (x(s),t(s))$

$$\begin{cases} \dot{t} = 1 \\ \dot{x} = -x, \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} t(s) = s \\ \dot{x}(t) = -x, \end{cases}$$

la cui soluzione, in forma cartesiana, è data da

$$x(t) = x_0 e^{-t}, \quad x_0 \in \mathbb{R}. \tag{2.4}$$

Si osservi (Figura 7) che tutte le caratteristiche intersecano $t = 0$ e quindi

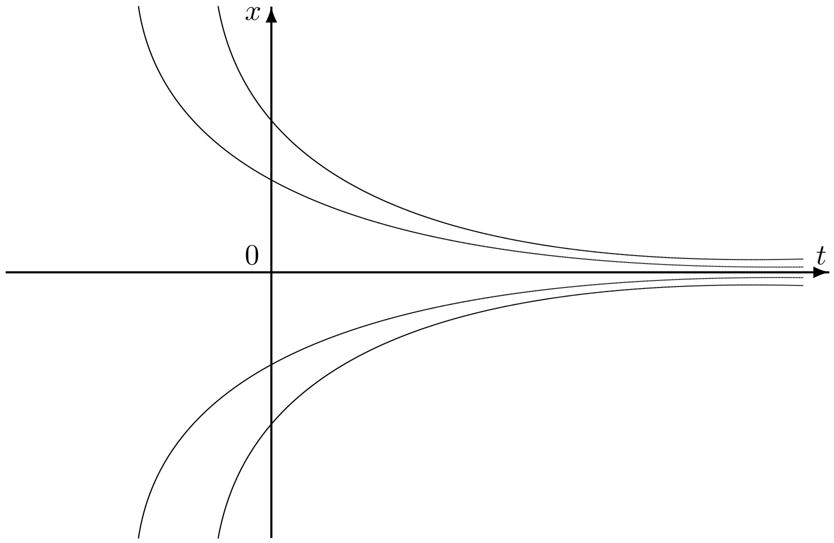

Figura 7: Curve caratteristiche dell'equazione alle derivate parziali dell'Esercizio 2.4

pescano il dato per propagarlo su tutto il piano. Si ha poi

$$\frac{d}{dt} u(x(t), t) = u(x(t), t) + 1,$$

da cui

$$u\left(x_0 e^{-t}, t\right) = (u(x_0, 0) + 1)e^t - 1 = (x_0 + 1)e^t - 1$$

e visto che dalla (2.4) si ha $x_0 = x_0(x, t) = xe^t$, si ottiene

$$u(x, t) = \left(xe^t + 1\right) e^t - 1 = xe^{2t} + e^t - 1.$$

Lo studente diligente può verificare che tale $u = u(x, t)$ risolve effettivamente il problema di Cauchy proposto. ■

Esercizio 2.5 *Determinare la soluzione del problema di Cauchy*

$$\begin{cases} u_t + xu_x = 0 \\ \\ u(x,0) = \begin{cases} 1 & \textit{per } 0 \le x \le 1 \\ 0 & \textit{altrimenti.} \end{cases} \end{cases}$$

Risoluzione. Si tratta di una equazione alle derivate parziali in due variabili lineare del prim'ordine con dato di Cauchy discontinuo. Ne cerchiamo la soluzione $u = u(x,t)$ con il metodo delle curve caratteristiche.
Le curve caratteristiche di tale equazione, una famiglia ad un parametro, sono definite dal sistema dinamico in $(x,t) = (x(s), t(s))$

$$\begin{cases} \dot{t} = 1 \\ \dot{x} = x, \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} t(s) = s \\ \dot{x}(t) = x, \end{cases}$$

la cui soluzione, in forma cartesiana, è data da

$$x(t) = x_0 e^t, \quad x_0 \in \mathbb{R}. \tag{2.5}$$

Si osservi (Figura 8) che tutte le caratteristiche intersecano $t = 0$ e quindi

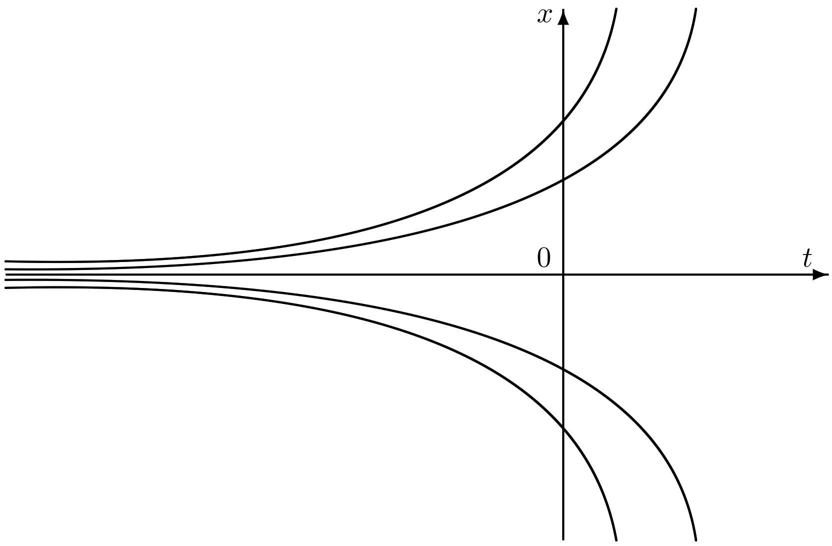

Figura 8: Curve caratteristiche dell'equazione alle derivate parziali dell'Esercizio 2.5

pescano il dato per propagarlo su tutto il piano. Si ha poi

$$\frac{d}{dt}u(x(t),t) = 0,$$

da cui

$$u\left(x_0 e^t, t\right) = u(x_0, 0) = \begin{cases} 1 & \text{per } 0 \leq x_0 \leq 1 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

e visto che dalla (2.5) si ha $x_0 = x_0(x,t) = xe^{-t}$, si ottiene

$$u(x,t) = \begin{cases} 1 & \text{per } 0 \leq xe^{-t} \leq 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{per } 0 \leq x \leq e^t \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Lo studente diligente può verificare che tale $u = u(x,t)$ risolve effettivamente il problema di Cauchy proposto.
È qui chiaro il meccanismo delle curve caratteristiche: il dato dell'intervallo $0 \leq x \leq 1$ viene propagato in tutti i punti in cui arrivano le curve caratteristiche che *pescano* in tale intervallo: poiché l'equazione è omogenea e il dato costante, tale valore della costante si propaga inalterata in tutta la *regione di dipendenza.* ■

Esercizio 2.6 *Determinare le curve caratteristiche per l'equazione*

$$u_t + xt^2 u_x = xt^2 u$$

e disegnarle sul piano (x,t)*. Successivamente, determinare la soluzione del problema di Cauchy*

$$\begin{cases} u_t + xt^2 u_x = xt^2 u \\ \\ u(x,0) = x^3. \end{cases}$$

Risoluzione. Si tratta di una equazione alle derivate parziali in due variabili lineare del prim'ordine con dato di Cauchy.
Le curve caratteristiche di tale equazione, una famiglia ad un parametro, sono definite dal sistema dinamico in $(x,t) = (x(s), t(s))$

$$\begin{cases} \dot{t} = 1 \\ \dot{x} = xt^2, \end{cases}$$

ovvero la cui soluzione, in forma cartesiana, è data da

$$x(t) = x_0 e^{t^3/3}, \quad x_0 \in \mathbb{R}. \tag{2.6}$$

Si osservi (Figura 9) che tutte le caratteristiche intersecano $t = 0$ e quindi

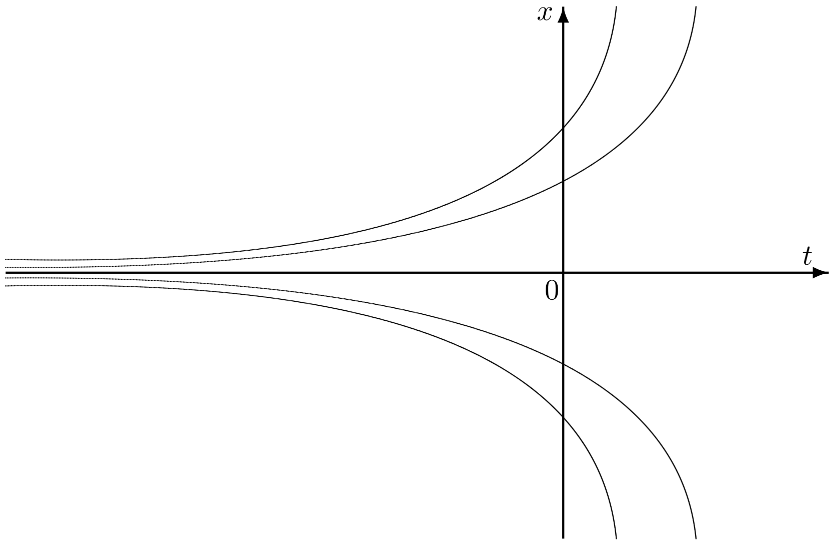

Figura 9: Curve caratteristiche dell'equazione alle derivate parziali dell'Esercizio 2.6

pescano il dato per propagarlo su tutto il piano. Si ha poi

$$\frac{d}{dt}u(x(t),t) = x(t)t^2u(x(t),t) = x_0t^2e^{t^3/3}u(x(t),t),$$

da cui procedendo per separazioni di variabili,

$$u\left(x_0e^{t^3/3},t\right) = u(x_0,0)e^{-x_0}e^{x_0e^{t^3/3}} = x_0^3e^{-x_0}e^{x_0e^{t^3/3}}$$

e visto che dalla (2.6) si ha $x_0 = x_0(x,t) = xe^{-t^3/3}$, si ottiene

$$u(x,t) = \left(xe^{-t^3/3}\right)^3 e^{-xe^{-t^3/3}}e^x$$

ovvero

$$u(x,t) = x^3e^{x\left(1-e^{-t^3/3}\right)-t^3}.$$

Lo studente diligente può verificare che tale $u = u(x,t)$ risolve effettivamente il problema di Cauchy proposto. ■

Esercizio 2.7 *Utilizzando il metodo delle curve caratteristiche, determinare la soluzione del problema di Cauchy*

$$\begin{cases} u_t + (2x - 2t^3)u_x = x \\ \\ u(x,0) = 2x. \end{cases}$$

Risoluzione. Si tratta di una equazione alle derivate parziali in due variabili lineare del prim'ordine con dato di Cauchy. Ne cerchiamo la soluzione $u = u(x,t)$ con il metodo delle curve caratteristiche.
Le curve caratteristiche di tale equazione, una famiglia ad un parametro, sono definite dal sistema dinamico in $(x,t) = (x(s), t(s))$

$$\begin{cases} \dot{t} = 1 \\ \dot{x} = 2x - 2t^3, \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} t(s) = s \\ \dot{x}(t) = 2x - 2t^3. \end{cases}$$

Si tratta di un'equazione differenziale lineare del prim'ordine. La soluzione dell'omogenea associata, $\dot{x}(t) = 2x$, è data da

$$x(t) = ce^{2t}, \quad c \in \mathbb{R}. \tag{2.7}$$

Per risolvere l'equazione differenziale non omogenea procediamo con il metodo della variazione delle costanti: cerchiamo una soluzione del tipo $x(t) = c(t)e^{2t}$, da cui sostituendo nell'equazione si ha $\dot{c}e^{2t} = -2t^3$. Perciò

$$c(t) = -\int 2t^3 e^{-2t} dt$$

e procedendo ripetutamente con integrazione per parti, si ha

$$\begin{aligned} c(t) =& t^3 e^{-2t} - \int 3t^2 e^{-2t} dt = \\ & t^3 e^{-2t} + \frac{3}{2} t^2 e^{-2t} - \int 3te^{-2t} dt = \\ & \left(t^3 + \frac{3}{2}t^2 + \frac{3}{2}t\right) e^{-2t} - \int \frac{3}{2} e^{-2t} dt = \\ & \left(t^3 + \frac{3}{2}t^2 + \frac{3}{2}t + \frac{3}{4}\right) e^{-2t} + c. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Sostituendo la (2.8) in (2.7), la soluzione dell'equazione differenziale, perciò, in forma cartesiana, è data da

$$x(t) = \left(t^3 + \frac{3}{2}t^2 + \frac{3}{2}t + \frac{3}{4}\right) + \left(x_0 - \frac{3}{4}\right) e^{2t}, \quad x_0 \in \mathbb{R}. \tag{2.9}$$

Si osservi (Figura 10) che tutte le caratteristiche intersecano $t = 0$ e quindi *pescano* il dato per propagarlo su tutto il piano. Si ha poi

$$\frac{d}{dt} u(x(t), t) = x(t) = \left(t^3 + \frac{3}{2}t^2 + \frac{3}{2}t + \frac{3}{4}\right) + \left(x_0 - \frac{3}{4}\right) e^{2t},$$

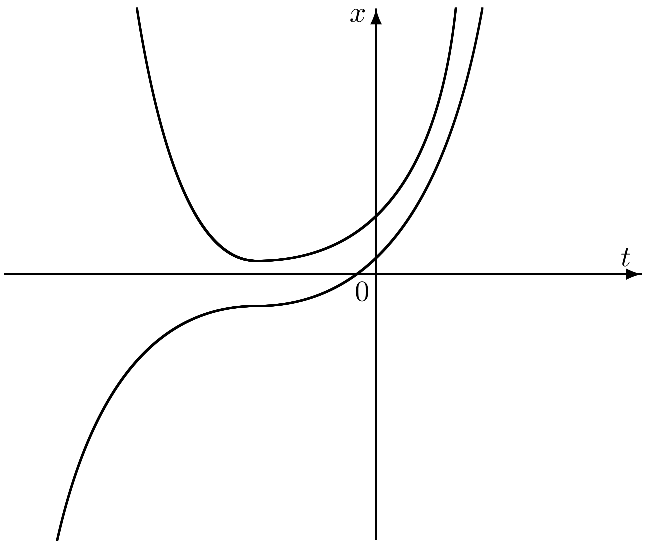

Figura 10: Curve caratteristiche dell'equazione alle derivate parziali dell'Esercizio 2.7

da cui integrando si ha

$$\begin{aligned}
&u\left(t^3+\frac{3}{2}t^2+\frac{3}{2}t+\frac{3}{4}+\left(x_0-\frac{3}{4}\right)e^{2t},t\right)\\
&=\frac{t^4}{4}+\frac{t^3}{2}+\frac{3}{4}t^2+\frac{3}{4}t+\frac{x_0-\frac{3}{4}}{2}e^{2t}+u(x_0,0)-\frac{x_0-\frac{3}{4}}{2}\\
&=\frac{t^4}{4}+\frac{t^3}{2}+\frac{3}{4}t^2+\frac{3}{4}t+\frac{x_0-\frac{3}{4}}{2}e^{2t}+2x_0-\frac{x_0-\frac{3}{4}}{2}
\end{aligned}$$

e visto che dalla (2.9) si ha

$$x_0=x_0(x,t)=\left(x-t^3-\frac{3}{2}t^2-\frac{3}{2}t-\frac{3}{4}\right)e^{-2t}+\frac{3}{4},$$

si ottiene

$$\begin{aligned}
u(x,t)=&\frac{3}{2}\left(x-t^3-\frac{3}{2}t^2-\frac{3}{2}t-\frac{3}{4}\right)e^{-2t}\\
&+\frac{3}{2}+\frac{t^4}{4}+\frac{t^3}{2}+\frac{3}{4}t^2+\frac{3}{4}t+\frac{1}{2}\left(x-t^3-\frac{3}{2}t^2-\frac{3}{2}t-\frac{3}{4}\right),
\end{aligned}$$

ovvero

$$u(x,t)=\frac{3}{2}\left(x-t^3-\frac{3}{2}t^2-\frac{3}{2}t-\frac{3}{4}\right)e^{-2t}+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}t^4.$$

Lo studente diligente può verificare che tale $u=u(x,t)$ risolve effettivamente il problema di Cauchy proposto. ■

Esercizio 2.8 *Utilizzando il metodo delle curve caratteristiche, determinare la soluzione del problema di Cauchy*

$$\begin{cases} u_t - 2xtu_x = u + t \\ \\ u(x,0) = -2x. \end{cases}$$

Risoluzione. Si tratta di una equazione alle derivate parziali in due variabili lineare del prim'ordine con dato di Cauchy.
Le curve di tale equazione, una famiglia ad un parametro, sono definite dal sistema dinamico in $(x,t) = (x(s), t(s))$

$$\begin{cases} \dot{t} = 1 \\ \dot{x} = -2xt, \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} t(s) = s \\ \dot{x}(t) = -2xt, \end{cases}$$

la cui soluzione, in forma cartesiana, è data da

$$x(t) = x_0 e^{-t^2}, \quad x_0 \in \mathbb{R}. \tag{2.10}$$

Si osservi (Figura 11) che tutte le caratteristiche intersecano $t = 0$ e quindi

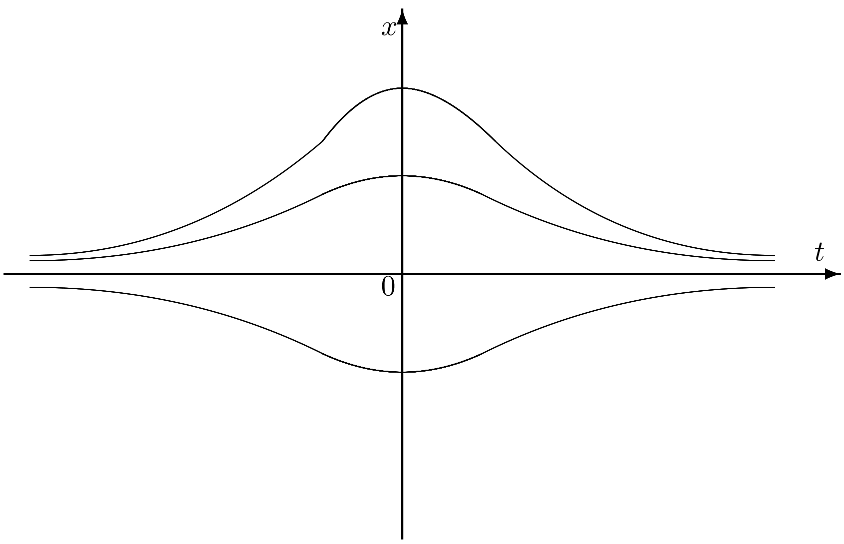

Figura 11: Curve caratteristiche dell'equazione alle derivate parziali dell'Esercizio 2.8

pescano il dato per propagarlo su tutto il piano. Si ha poi

$$\frac{d}{dt} u(x(t), t) = u(x(t), t) + t. \tag{2.11}$$

La (2.11) è un'equazione differenziale lineare del prim'ordine del tipo

$$y' = y + t$$

L'equazione differenziale omogenea associata ha soluzione $y(t) = \alpha e^t$. Cerchiamo dunque una soluzione della non omogenea del tipo (metodo della variazione delle costanti) $y(t) = \alpha(t)e^t$ per cui sostituendo nell'equazione si ha $\alpha' = te^{-t}$, e integrando una volta per parti si ottiene $\alpha(t) = -te^{-t} - e^{-t}$. Sostituendo si ottiene infin $y(t) = -t - 1 + \alpha e^t$. Abbiamo perciò che le soluzioni di (2.11) sono date da

$$u\left(x_0 e^{-t^2}, t\right) = -t - 1 + (u(x_0, 0) + 1)e^t = -t - 1 + (-2x_0 + 1)e^t$$

e visto che dalla (2.10) si ha $x_0 = x_0(x,t) = xe^{t^2}$, si ottiene

$$u(x,t) = -t - 1 + \left(1 - 2xe^{t^2}\right)e^t = -t - 1 + e^t - 2xe^{t+t^2}.$$

Lo studente diligente può verificare che tale $u = u(x,t)$ risolve effettivamente il problema di Cauchy proposto. ■

Esercizio 2.9 *Utilizzando il metodo delle curve caratteristiche, determinare la soluzione del problema di Cauchy*

$$\begin{cases} u_t + 3t^2 u_x = x^2 \\ \\ u(x,0) = \sin x. \end{cases}$$

Risoluzione. Si tratta di una equazione alle derivate parziali in due variabili lineare del prim'ordine con dato di Cauchy.
Le curve caratteristiche di tale equazione, una famiglia ad un parametro, sono definite dal sistema dinamico in $(x,t) = (x(s), t(s))$

$$\begin{cases} \dot{t} = 1 \\ \dot{x} = 3t^2, \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} t(s) = s \\ \dot{x}(t) = 3t^2, \end{cases}$$

la cui soluzione, in forma cartesiana, è data da

$$x(t) = t^3 + x_0, \quad x_0 \in \mathbb{R}. \tag{2.12}$$

Si osservi (Figura 12) che tutte le caratteristiche intersecano $t = 0$ e quindi

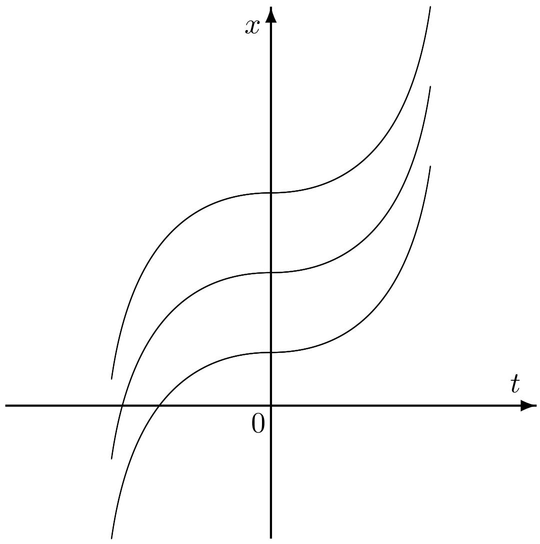

Figura 12: Curve caratteristiche dell'equazione alle derivate parziali dell'Esercizio 2.9

pescano il dato per propagarlo su tutto il piano. Si ha poi

$$\frac{d}{dt}u(x(t),t) = x(t)^2 = t^6 + 2x_0t^3 + x_0^2,$$

da cui

$$u\left(t^3 + x_0, t\right) = \frac{t^7}{7} + \frac{x_0}{2}t^4 + x_0^2 t + u(x_0, 0) = \frac{t^7}{7} + \frac{x_0}{2}t^4 + x_0^2 t + \sin x_0$$

e visto che dalla (2.12) si ha $x_0 = x_0(x,t) = x - t^3$, si ottiene

$$u(x,t) = \frac{9}{14}t^7 - \frac{3}{2}xt^4 + x^2 t + \sin\left(x - t^3\right).$$

Lo studente diligente può verificare che tale $u = u(x,t)$ risolve effettivamente il problema di Cauchy proposto. ∎

Esercizio 2.10 *Utilizzando il metodo delle curve caratteristiche, determinare la soluzione del problema di Cauchy*

$$\begin{cases} u_t + 2te^{-x}u_x = e^x \\ \\ u(x,0) = x. \end{cases}$$

La soluzione così trovata è globalmente definita?

Risoluzione. Si tratta di una equazione alle derivate parziali in due variabili lineare del prim'ordine con dato di Cauchy.
Le curve di tale equazione, una famiglia ad un parametro, sono definite dal sistema dinamico in $(x,t) = (x(s), t(s))$

$$\begin{cases} \dot{t} = 1 \\ \dot{x} = 2te^{-x}, \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} t(s) = s \\ \dot{x}(t) = 2te^{-x}, \end{cases}$$

da cui, procedendo per separazioni di variabili, si trova che la soluzione, in forma cartesiana, è data da

$$x(t) = \log\left(t^2 + c\right), \quad c \in \mathbb{R} : t^2 + c > 0.$$

Tenuto conto che è fondamentale che le caratteristiche *peschino* il dato su $t = 0$ per propagarlo, siamo perciò interessati solo a quelle caratteristiche definite per $t = 0$, ovvero $0 < c = e^{x_0}$ e quindi

$$x(t) = \log\left(t^2 + e^{x_0}\right), \quad x_0 \in \mathbb{R}. \tag{2.13}$$

È chiaro che tali curve caratteristiche non riempiono tutto il piano ma solo la regione $e^x - t^2 > 0$. Si ha poi

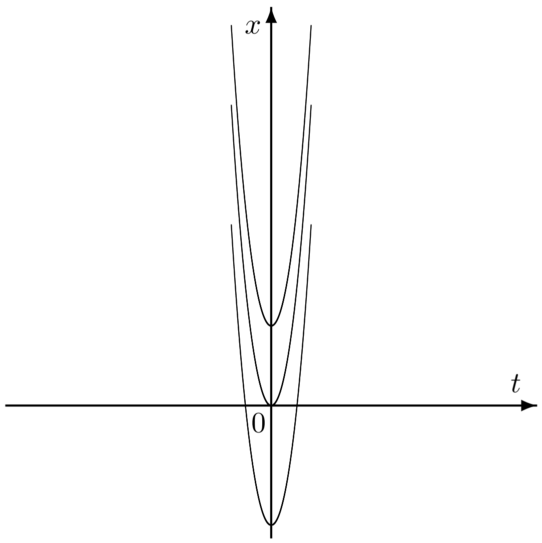

Figura 13: Curve caratteristiche dell'equazione alle derivate parziali dell'Esercizio 2.10

$$\frac{d}{dt}u(x(t), t) = e^{x(t)} = t^2 + e^{x_0},$$

da cui

$$u\left(\log\left(t^2+e^{x_0}\right),t\right)=\frac{t^3}{3}+e^{x_0}t+u(x_0,0)=\frac{t^3}{3}+e^{x_0}t+x_0$$

e visto che dalla (2.13) si ha $x_0 = x_0(x,t) = \log(e^x - t^2)$, si ottiene

$$u(x,t)=-\frac{2}{3}t^3+te^x+\log(e^x-t^2),$$

definita nella regione $-e^{x/2} < t < e^{x/2}$. La soluzione non è pertanto definita globalmente.

Lo studente diligente può verificare che tale $u = u(x,t)$ risolve effettivamente il problema di Cauchy proposto. ■

Esercizio 2.11 *Utilizzando il metodo delle curve caratteristiche, determinare la soluzione del problema di Cauchy*

$$\begin{cases} u_t - \log(t+1)u_x = 2ut \\ \\ u(x,0) = e^x. \end{cases}$$

Risoluzione. Si tratta di una equazione alle derivate parziali in due variabili lineare del prim'ordine con dato di Cauchy il cui dominio di definizione è il semipiano $t > -1$. Ne cerchiamo la soluzione $u = u(x,t)$ con il metodo delle curve caratteristiche.
Le curve di tale equazione, una famiglia ad un parametro, sono definite dal sistema dinamico in $(x,t) = (x(s), t(s))$

$$\begin{cases} \dot{t} = 1 \\ \dot{x} = -\log(1+t), \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} t(s) = s \\ \dot{x}(t) = -\log(1+t), \end{cases}$$

la cui soluzione, in forma cartesiana, è data da

$$x(t) = -(1+t)\log(1+t) + t + x_0, \quad x_0 \in \mathbb{R}. \tag{2.14}$$

Si osservi (Figura 14) che tutte le caratteristiche intersecano $t = 0$ e quindi *pescano* il dato per propagarlo su tutto il semipiano $t > -1$. Si ha poi

$$\frac{d}{dt}u(x(t),t) = 2tu(x(t),t),$$

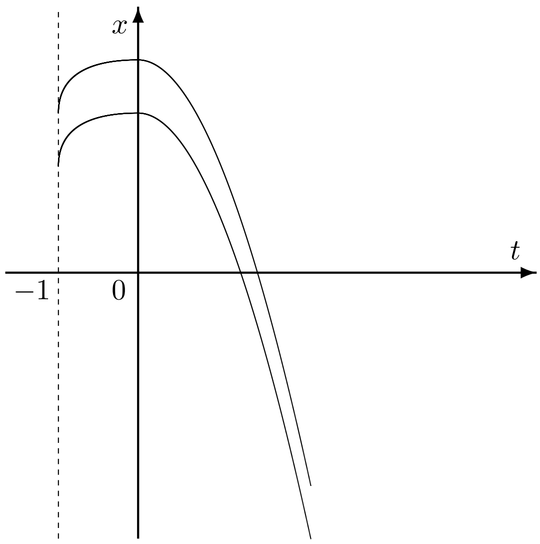

Figura 14: Curve caratteristiche dell'equazione alle derivate parziali dell'Esercizio 2.11

da cui

$$u\left(-(1+t)\log(1+t)+t+x_0,t\right)=u(x_0,0)e^{t^2}=e^{x_0}e^{t^2}$$

e visto che dalla (2.14) si ha $x_0=x_0(x,t)=x-t+(1+t)\log(1+t)$, si ottiene

$$u(x,t)=e^{\left(x-t+(1+t)\log(1+t)+t^2\right)}.$$

Lo studente diligente può verificare che tale $u=u(x,t)$ risolve effettivamente il problema di Cauchy proposto. ■

Esercizio 2.12 *Utilizzando il metodo delle curve caratteristiche, determinare la soluzione del problema di Cauchy*

$$\begin{cases} u_t+e^t u_x=x^2 \\ \\ u(x,0)=x-1. \end{cases}$$

Risoluzione. Si tratta di una equazione alle derivate parziali in due variabili lineare del prim'ordine con dato di Cauchy.
Le curve di tale equazione, una famiglia ad un parametro, sono definite dal sistema dinamico in $(x,t)=(x(s),t(s))$

$$\begin{cases} \dot t=1 \\ \dot x=e^t, \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} t(s) = s \\ \dot{x}(t) = e^t, \end{cases}$$

la cui soluzione, in forma cartesiana, è data da

$$x(t) = e^t + x_0 - 1, \quad x_0 \in \mathbb{R}. \tag{2.15}$$

Si osservi (Figura 15) che tutte le caratteristiche intersecano $t = 0$ e quindi

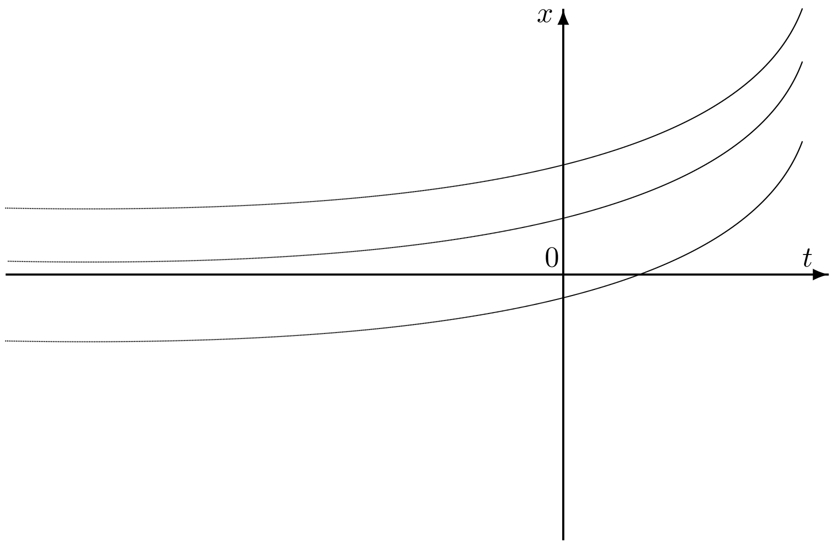

Figura 15: Curve caratteristiche dell'equazione alle derivate parziali dell'Esercizio 2.12

pescano il dato per propagarlo su tutto il piano. Si ha poi

$$\frac{d}{dt}u(x(t), t) = x(t)^2 = e^{2t} + 2(x_0 - 1)e^t + (x_0 - 1)^2,$$

da cui

$$\begin{aligned} u\left(e^t + x_0 - 1, t\right) &= \frac{1}{2}e^{2t} + 2(x_0 - 1)e^t + (x_0 - 1)^2 t \\ &\quad + u(x_0, 0) - \frac{1}{2} - 2(x_0 - 1) \\ &= \frac{1}{2}e^{2t} + 2(x_0 - 1)e^t + (x_0 - 1)^2 t - x_0 + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

e visto che dalla (2.15) si ha $x_0 = x_0(x, t) = x - e^t + 1$, si ottiene

$$u(x, t) = \frac{1}{2}\left(e^{2t} - 1\right) + \left(2e^t - 1\right)\left(x - e^t\right) + \left(x - e^t\right)^2 t.$$

Lo studente diligente può verificare che tale $u = u(x, t)$ risolve effettivamente il problema di Cauchy proposto. ■

Esercizio 2.13 *Utilizzando il metodo delle curve caratteristiche, determinare la soluzione del problema di Cauchy*

$$\begin{cases} u_t + (x+t^2)u_x = xu \\ \\ u(x,0) = 1. \end{cases}$$

Risoluzione. Si tratta di una equazione alle derivate parziali in due variabili lineare del prim'ordine con dato di Cauchy.
Le curve di tale equazione, una famiglia ad un parametro, sono definite dal sistema dinamico in $(x,t) = (x(s), t(s))$

$$\begin{cases} \dot{t} = 1 \\ \dot{x} = x + t^2, \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} t(s) = s \\ \dot{x}(t) = x + t^2. \end{cases} \tag{2.16}$$

La soluzione dell'omogenea associata, $x' = x$, è data da $x(t) = \alpha e^t$; cerchiamo una soluzione particolare della non omogenea del tipo $p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$ e sostituendo nella $(2.16)_2$ si trova $p(t) = -t^2 - 2t - 2$ da cui la soluzione generale della $(2.16)_2$

$$x(t) = -t^2 - 2t - 2 + (x_0 + 2)e^t, \quad x_0 \in \mathbb{R}. \tag{2.17}$$

Si osservi (Figura 16) che tutte le caratteristiche intersecano $t = 0$ e quindi *pescano* il dato per propagarlo su tutto il piano. Si ha poi

$$\frac{d}{dt} u(x(t), t) = x(t) u(x(t), t) = \left(-t^2 - 2t - 2 + (x_0 + 2)e^t\right) u(x(t), t),$$

da cui procedendo per separazione di variabili,

$$\begin{aligned} u\left(-t^2 - 2t - 2 + (x_0+2)e^t, t\right) &= u(x_0, 0) e^{-(x_0+2)} e^{\left(-\frac{t^3}{3} - t^2 - 2t + (x_0+2)e^t\right)} \\ &= e^{-(x_0+2)} e^{\left(-\frac{t^3}{3} - t^2 - 2t + (x_0+2)e^t\right)} \end{aligned}$$

e visto che dalla (2.17) si ha $x_0 = x_0(x,t) = \left(x + t^2 + 2t + 2\right) e^{-t} - 2$, si ottiene

$$u(x,t) = e^{\left(x+t^2+2t+2\right)e^{-t}} e^{\left(-\frac{t^3}{3} - t^2 - 2t + x + t^2 + 2t + 2\right)},$$

per cui la soluzione del problema può essere scritta come

$$u(x,t) = e^{\left(-\frac{t^3}{3} - t^2 - 2t + \left(1 - e^{-t}\right)\left(x + t^2 + 2t + 2\right)\right)}.$$

Lo studente diligente può verificare che tale $u = u(x,t)$ risolve effettivamente il problema di Cauchy proposto. ■

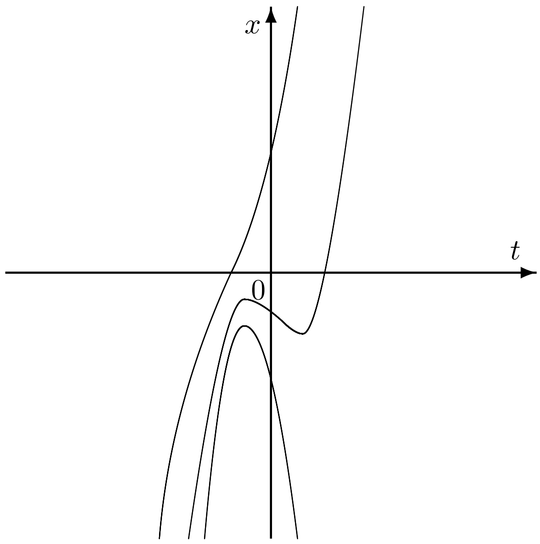

Figura 16: Curve caratteristiche dell'equazione alle derivate parziali dell'Esercizio 2.13

Esercizio 2.14 *Utilizzando il metodo delle curve caratteristiche, determinare la soluzione del problema di Cauchy*

$$\begin{cases} u_t + te^t u_x = 3x \\ \\ u(x,0) = x + 3. \end{cases}$$

Risoluzione. Si tratta di una equazione alle derivate parziali in due variabili lineare del prim'ordine con dato di Cauchy.
Le curve di tale equazione, una famiglia ad un parametro, sono definite dal sistema dinamico in $(x,t) = (x(s), t(s))$

$$\begin{cases} \dot{t} = 1 \\ \dot{x} = te^t, \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} t(s) = s \\ \dot{x}(t) = te^t, \end{cases}$$

la cui soluzione, in forma cartesiana, è data da

$$x(t) = te^t - e^t + x_0 + 1, \quad x_0 \in \mathbb{R}. \tag{2.18}$$

Si osservi (Figura 17) che tutte le caratteristiche intersecano $t = 0$ e quindi *pescano* il dato per propagarlo su tutto il piano. Si ha poi

$$\frac{d}{dt}u(x(t),t) = 3x(t) = 3te^t - 3e^t + 3(x_0 + 1),$$

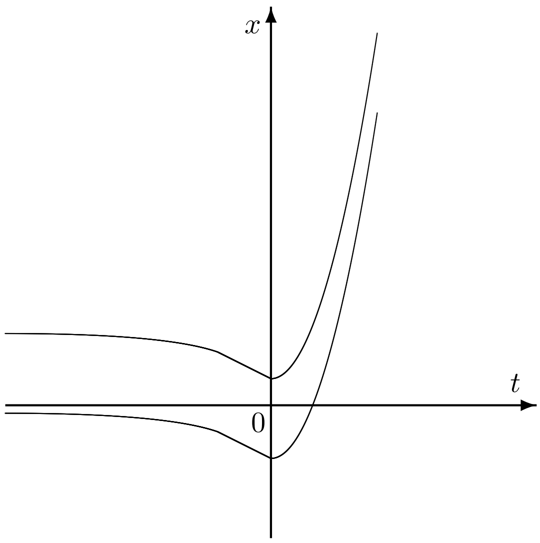

Figura 17: Curve caratteristiche dell'equazione alle derivate parziali dell'Esercizio 2.14

da cui

$$\begin{aligned} u\left(te^t - e^t + x_0 + 1, t\right) &= 3te^t - 6e^t + 3(x_0+1)t + u(x_0, 0) + 6 \\ &= 3te^t - 6e^t + 3(x_0+1)t + x_0 + 9 \end{aligned}$$

e visto che dalla (2.18) si ha $x_0 = x_0(x,t) = x - te^t + e^t - 1$, si ottiene

$$u(x,t) = 3xt - 3t^2e^t + 5te^t - 5e^t + x + 8.$$

Lo studente diligente può verificare che tale $u = u(x,t)$ risolve effettivamente il problema di Cauchy proposto. ■

Esercizio 2.15 *Utilizzando il metodo delle curve caratteristiche, determinare la soluzione del problema di Cauchy*

$$\begin{cases} u_t + 5xt^2u_x = u + 2 \\ \\ u(x,0) = x + 2. \end{cases}$$

Risoluzione. Si tratta di una equazione alle derivate parziali in due variabili lineare del prim'ordine con dato di Cauchy.
Le curve di tale equazione, una famiglia ad un parametro, sono definite dal sistema dinamico in $(x,t) = (x(s), t(s))$

$$\begin{cases} \dot{t} = 1 \\ \dot{x} = 5xt^2, \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} t(s) = s \\ \dot{x}(t) = 5xt^2, \end{cases}$$

la cui soluzione, in forma cartesiana, è data da

$$x(t) = x_0 e^{\frac{5}{3}t^3}, \quad x_0 \in \mathbb{R}. \tag{2.19}$$

Si osservi (Figura 18) che tutte le caratteristiche intersecano $t = 0$ e quindi

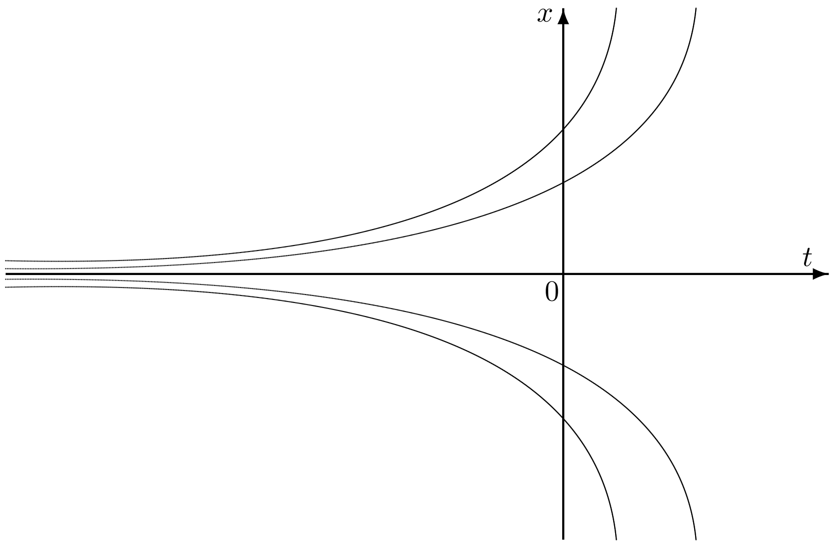

Figura 18: Curve caratteristiche dell'equazione alle derivate parziali dell'Esercizio 2.15

pescano il dato per propagarlo su tutto il piano. Si ha poi

$$\frac{d}{dt}u(x(t), t) = u(x(t), t) + 2,$$

equazione differenziale del prim'ordine la cui soluzione è data da

$$u\left(x_0 e^{\frac{5}{3}t^3}, t\right) = (u(x_0, 0) + 2)e^t - 2 = (x_0 + 4)e^t - 2$$

e visto che dalla (2.19) si ha $x_0 = x_0(x, t) = xe^{-\frac{5}{3}t^3}$, si ottiene

$$u(x, t) = xe^{t - \frac{5}{3}t^3} + 4e^t - 2.$$

Lo studente diligente può verificare che tale $u = u(x, t)$ risolve effettivamente il problema di Cauchy proposto. ■

Esercizio 2.16 *Utilizzando il metodo delle curve caratteristiche, determinare la soluzione del problema di Cauchy*

$$\begin{cases} u_t + (xt+t)u_x = 4 \\ \\ u(x,0) = 2x. \end{cases}$$

Risoluzione. Si tratta di una equazione alle derivate parziali in due variabili lineare del prim'ordine con dato di Cauchy.
Le curve di tale equazione, una famiglia ad un parametro, sono definite dal sistema dinamico in $(x,t) = (x(s), t(s))$

$$\begin{cases} \dot{t} = 1 \\ \dot{x} = xt + t, \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} t(s) = s \\ \dot{x}(t) = xt + t, \end{cases}$$

la cui soluzione, in forma cartesiana, è data da

$$x(t) = (x_0 + 1)e^{t^2/2} - 1, \quad x_0 \in \mathbb{R}. \tag{2.20}$$

Si osservi (Figura 19) che tutte le caratteristiche intersecano $t = 0$ e quindi

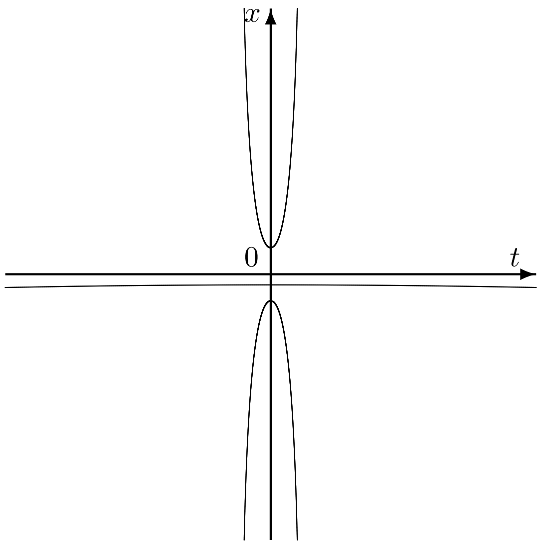

Figura 19: Curve caratteristiche dell'equazione alle derivate parziali dell'Esercizio 2.16

pescano il dato per propagarlo su tutto il piano. Si ha poi

$$\frac{d}{dt}u(x(t), t) = 4,$$

equazione differenziale del prim'ordine la cui soluzione è data da

$$u\left((x_0+1)e^{t^2/2}-1,t\right)=4t+u(x_0,0)=4t+2x_0$$

e visto che dalla (2.20) si ha $x_0=x_0(x,t)=(x+1)e^{-t^2/2}-1$, si ottiene

$$u(x,t)=4t-2+2(x+1)e^{-t^2/2}.$$

Lo studente diligente può verificare che tale $u=u(x,t)$ risolve effettivamente il problema di Cauchy proposto. ■

Esercizio 2.17 *Utilizzando il metodo delle curve caratteristiche, determinare la soluzione del problema di Cauchy*

$$\begin{cases} u_t+3xt^5u_x=t^5x+2t \\ \\ u(x,0)=x^3. \end{cases}$$

Risoluzione. Si tratta di una equazione alle derivate parziali in due variabili lineare del prim'ordine con dato di Cauchy.
Le curve di tale equazione, una famiglia ad un parametro, sono definite dal sistema dinamico in $(x,t)=(x(s),t(s))$

$$\begin{cases} \dot{t}=1 \\ \dot{x}=3xt^5, \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} t(s)=s \\ \dot{x}(t)=3xt^5, \end{cases}$$

la cui soluzione, in forma cartesiana, è data da

$$x(t)=x_0e^{t^6/2}, \quad x_0\in\mathbb{R}. \tag{2.21}$$

Si osservi (Figura 20) che tutte le caratteristiche intersecano $t=0$ e quindi *pescano* il dato per propagarlo su tutto il piano. Si ha poi

$$\frac{d}{dt}u(x(t),t)=t^5x(t)+2t=x_0t^5e^{t^6/2}+2t,$$

da cui

$$u\left(x_0e^{t^6/2},t\right)=\frac{x_0}{3}e^{t^6/2}+t^2+u(x_0,0)-\frac{x_0}{3}=\frac{x_0}{3}e^{t^6/2}+t^2+x_0^3-\frac{x_0}{3}$$

e visto che dalla (2.21) si ha $x_0=x_0(x,t)=xe^{-t^6/2}$, si ottiene

$$u(x,t)=\frac{x}{3}+t^2+x^3e^{-\frac{3}{2}t^6}-\frac{x}{3}e^{-t^6/2}.$$

Lo studente diligente può verificare che tale $u=u(x,t)$ risolve effettivamente il problema di Cauchy proposto. ■

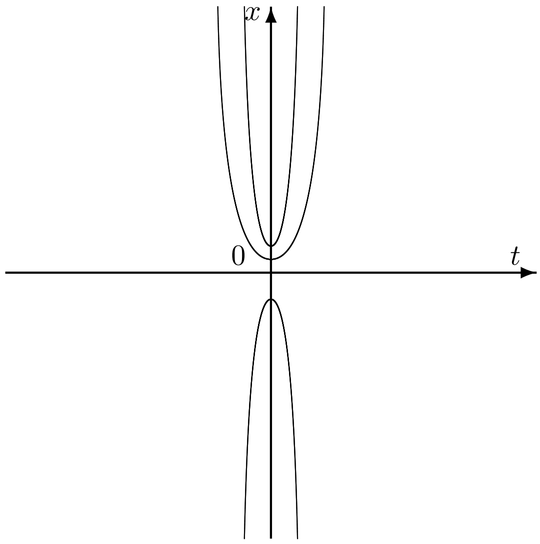

Figura 20: Curve caratteristiche dell'equazione alle derivate parziali dell'Esercizio 2.17

Esercizio 2.18 *Utilizzando il metodo delle curve caratteristiche, determinare la soluzione del problema di Cauchy*

$$\begin{cases} u_t + (t+x)e^t u_x = xt \\ \\ u(x,0) = x. \end{cases}$$

Risoluzione. Si tratta di una equazione alle derivate parziali in due variabili lineare del prim'ordine con dato di Cauchy.
Le curve di tale equazione, una famiglia ad un parametro, sono definite dal sistema dinamico in $(x,t) = (x(s), t(s))$

$$\begin{cases} \dot{t} = 1 \\ \dot{x} = t + x, \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} t(s) = s \\ \dot{x}(t) = t + x, \end{cases}$$

la cui soluzione, in forma cartesiana, è data da

$$x(t) = (x_0 + 1)e^t - 1 - t, \quad x_0 \in \mathbb{R}. \tag{2.22}$$

Si osservi (Figura 21) che tutte le caratteristiche intersecano $t = 0$ e quindi *pescano* il dato per propagarlo su tutto il piano. Si ha poi

$$\frac{d}{dt}u(x(t),t) = tx(t) = t\big((x_0+1)e^t - t - 1\big) = (x_0+1)te^t - t - t^2,$$

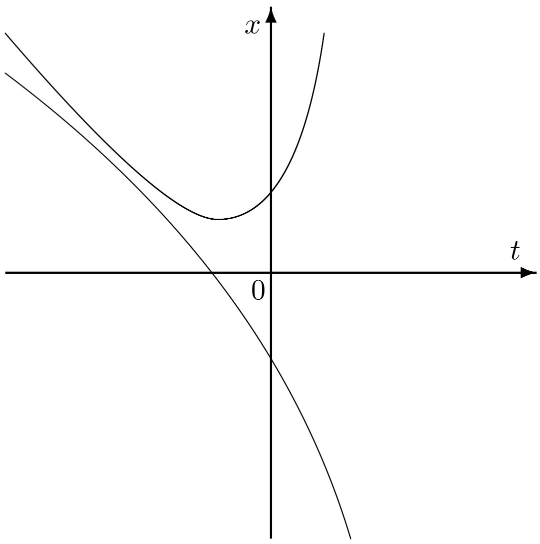

Figura 21: Curve caratteristiche dell'equazione alle derivate parziali dell'Esercizio 2.18

da cui

$$\begin{aligned} u\left((x_0+1)e^t - t - 1, t\right) &= (x_0+1)(te^t - e^t) + u(x_0, 0) - x_0 - 1 - \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3} \\ &= (x_0+1)(te^t - e^t) - 1 - \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3} \end{aligned}$$

e visto che dalla (2.18) si ha $x_0 = x_0(x,t) = e^{-t}(x+t+1) - 1$, si ottiene

$$u(x,t) = xt - x + t^2 - 2 + 2e^{-t}(x+t+1) - \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3}.$$

Lo studente diligente può verificare che tale $u = u(x,t)$ risolve effettivamente il problema di Cauchy proposto. ■

Esercizio 2.19 *Determinare le curve caratteristiche per l'equazione*

$$u_t + (x+2)u_x = u + 2t$$

e disegnarle sul piano (x,t). Successivamente, determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} u_t + (x+2)u_x = u + 2t \\ \\ u(x,0) = x. \end{cases}$$

Risoluzione. Si tratta di una equazione alle derivate parziali in due variabili lineare del prim'ordine con dato di Cauchy.
Le curve di tale equazione, una famiglia ad un parametro, sono definite dal sistema dinamico in $(x,t) = (x(s), t(s))$

$$\begin{cases} \dot{t} = 1 \\ \dot{x} = x + 2, \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} t(s) = s \\ \dot{x}(t) = x + 2, \end{cases}$$

la cui soluzione, in forma cartesiana, è data da

$$x(t) = (x_0 + 2)e^t - 2 \quad x_0 \in \mathbb{R}. \tag{2.23}$$

Si osservi (Figura 22) che tutte le caratteristiche intersecano $t = 0$ e quindi

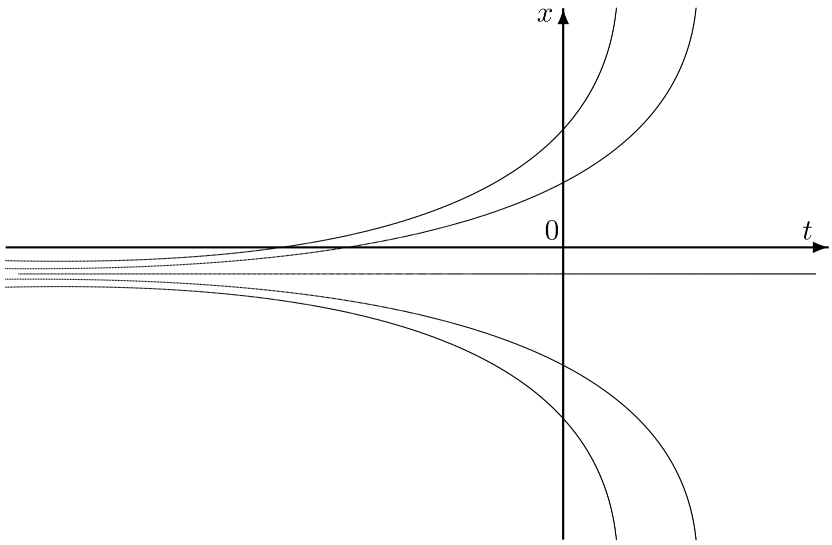

Figura 22: Curve caratteristiche dell'equazione alle derivate parziali dell'Esercizio 2.19

pescano il dato per propagarlo su tutto il piano. Si ha poi che l'equazione alle derivate parziali lungo le caratteristiche diviene

$$\frac{d}{dt}u(x(t), t) = u(x(t), t) + 2t, \tag{2.24}$$

ovvero un'equazione differenziale del prim'ordine non omogenea, $y' = y + 2t$. Una sua soluzione particolare può essere ricercata tra i polinomi del prim'ordine, $p(t) = a + bt$, da cui sostituendo si trova $p(t) = -2 - 2t$. La soluzione dell'omogenea associata è invece $y(t) = ke^t$. Perciò l'integrale generale dell'equazione (2.24) è data da

$$u\left((x_0+2)e^t - 2, t\right) = (u(x_0,0)+2)e^t - 2 - 2t = (x_0+2)e^t - 2 - 2t$$

e visto che dalla (2.23) si ha $x_0 = x_0(x,t) = e^{-t}(x+2) - 2$, si ottiene

$$u(x,t) = \left(e^{-t}(x+2)\right)e^t - 2 - 2t = x - 2t.$$

Lo studente diligente può verificare facilmente che tale $u = u(x,t)$ risolve effettivamente il problema di Cauchy proposto. ■

Esercizio 2.20 *Determinare le curve caratteristiche per l'equazione*

$$u_t + 2tx\ u_x = 0$$

e disegnarle sul piano (x,t). Successivamente, determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} u_t + 2tx\ u_x = 0 \\ \\ u(x,0) = |x|. \end{cases}$$

Risoluzione. Si tratta di una equazione alle derivate parziali in due variabili lineare del prim'ordine con dato di Cauchy continuo ma non derivabile. Le curve di tale equazione, una famiglia ad un parametro, sono definite dal sistema dinamico in $(x,t) = (x(s), t(s))$

$$\begin{cases} \dot{t} = 1 \\ \dot{x} = 2tx, \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} t(s) = s \\ \dot{x}(t) = 2tx, \end{cases}$$

la cui soluzione, in forma cartesiana, è data da

$$x(t) = x_0 e^{t^2}, \quad x_0 \in \mathbb{R}. \tag{2.25}$$

Si osservi (Figura 23) che tutte le caratteristiche intersecano $t = 0$ e quindi *pescano* il dato per propagarlo su tutto il piano. Si ha poi

$$\frac{d}{dt}u(x(t),t) = 0,$$

da cui

$$u\left(x_0 e^{t^2}, t\right) = u(x_0, 0) = |x_0|$$

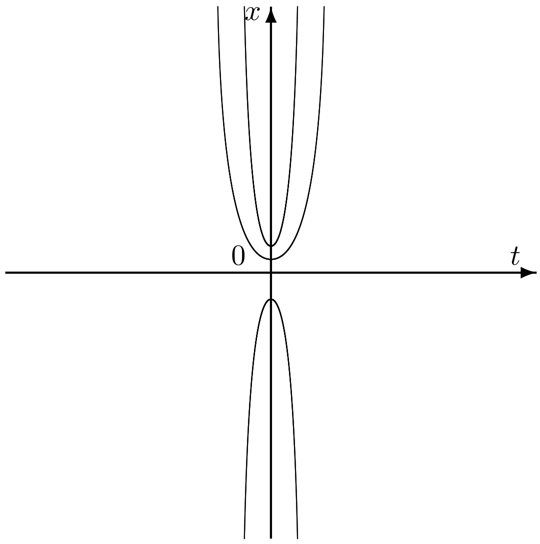

Figura 23: Curve caratteristiche dell'equazione alle derivate parziali dell'Esercizio 2.20

e visto che dalla (2.25) si ha $x_0 = x_0(x,t) = xe^{-t^2}$, si ottiene

$$u(x,t) = |xe^{-t^2}| = |x|e^{-t^2}.$$

Lo studente diligente può verificare che tale $u = u(x,t)$ risolve effettivamente il problema di Cauchy proposto. ■

Esercizio 2.21 *Determinare la soluzione del problema di Cauchy*

$$\begin{cases} u_t + xu_x = 2 + u \\ \\ u(x,0) = x. \end{cases}$$

Risoluzione. Si tratta di una equazione alle derivate parziali in due variabili lineare del prim'ordine con dato di Cauchy.
Le curve di tale equazione, una famiglia ad un parametro, sono definite dal sistema dinamico in $(x,t) = (x(s), t(s))$

$$\begin{cases} \dot{t} = 1 \\ \dot{x} = x, \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} t(s) = s \\ \dot{x}(t) = x, \end{cases}$$

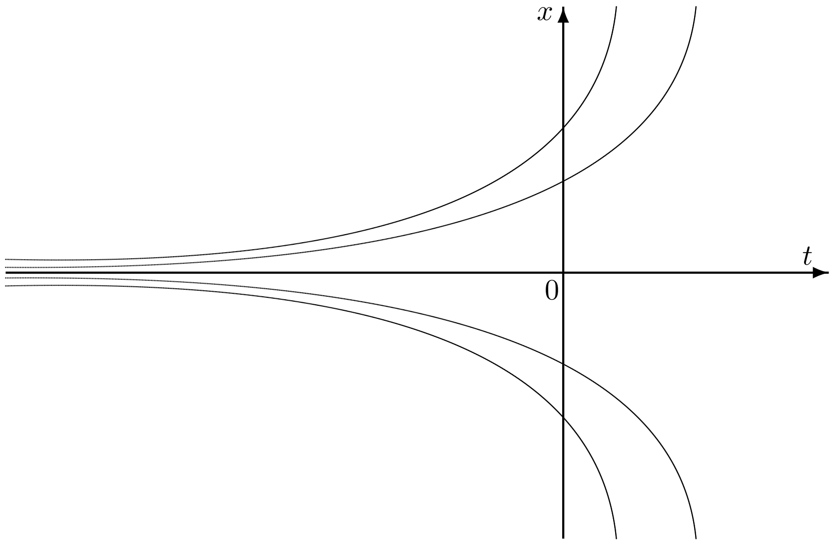

Figura 24: Curve caratteristiche dell'equazione alle derivate parziali dell'Esercizio 2.21

la cui soluzione, in forma cartesiana, è data da

$$x(t) = x_0 e^t, \quad x_0 \in \mathbb{R}. \tag{2.26}$$

Si osservi (Figura 24) che tutte le caratteristiche intersecano $t = 0$ e quindi *pescano* il dato per propagarlo su tutto il piano. Si ha poi

$$\frac{d}{dt} u(x(t), t) = 2 + u(x(t), t)$$

da cui

$$u\left(x_0 e^t, t\right) = (u(x_0, 0) + 2)e^t - 2 = (x_0 + 2)e^t - 2$$

e visto che dalla (2.26) si ha $x_0 = x_0(x, t) = xe^{-t}$, si ottiene

$$u(x, t) = \left(xe^{-t} + 2\right) e^t - 2 = x + 2e^t - 2.$$

Lo studente diligente può verificare facilmente che tale $u = u(x, t)$ risolve effettivamente il problema di Cauchy proposto. ■