Esercizio A,1 p. 8

TROVARE AUTOVALORI E AUTOVETTORI DELLA MATRICE A E MOSTRARE CHE $B = P^{-1} A P$ È UNA MATRICE DIAGONALE.
RISOLVERE IL SISTEMA LINEARE $\dot{y} = By$ E POI RISOLVERE $\dot{x} = Ax$.
INFINE DISEGNARE LO SPAZIO DELLE FASI SIA NEL PIANO X CHE NEL PIANO Y.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Nota: simmetrica

CALCOLO DI AUTOVETTORI E AUTOVALORI

Cerco $\lambda \in \mathbb{R}$, $v \in \mathbb{R}^2$ tali che

$$A v = \lambda v$$

$$\Rightarrow (A - \lambda I) v = 0$$

$\Rightarrow$ Devo imporre la condizione

$$\det (A - \lambda I) = 0$$

Nel nostro caso

$$\det (A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 1 & 3-\lambda \end{pmatrix} = (3-\lambda)^2 - 1 =$$

$$= \lambda^2 - 6\lambda + 8$$

Risolviamo $\lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0$

$$\lambda_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36-32}}{2} = \frac{6 \pm 2}{2} \begin{cases} 2 \\ 4 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Autovalori $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 4$

Per calcolare gli autovettori, consideriamo $v = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ e imponiamo $Av = \lambda_1 v$, cioè

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

dalla prima relazione abbiamo

$$3u_1 + u_2 = 2u_1$$

$$\Rightarrow u_1 + u_2 = 0$$

$$\Rightarrow u_1 = -u_2 = K$$

$\Rightarrow$ sono soluzione tutti i vettori del tipo $K \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$
quindi scegliamo $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Ora imponiamo $Av = \lambda_2 v$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

$$3u_1 + u_2 = 4u_1 \quad \Rightarrow \quad u_2 - u_1 = 0$$

$$\Rightarrow \quad u_1 = u_2 = K$$

Scegliamo $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ Autovettori $\quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad , \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Quindi $\quad P = [v_1, v_2] = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

- CALCOLO DI P^{-1}

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) =$$

sostituire alla seconda riga la seconda sommata alla prima

$$= \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) =$$

dividere per 2 la seconda riga

$$= \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 1/2 \end{array}\right) =$$

sostituire alla prima riga la prima meno la seconda

$$= \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 & 1/2 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Verifica $\quad P P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

- VERIFICA SU $B = P^{-1}AP$ (4)

$$B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

- RISOLUZIONE DI $\dot{y} = By$

$$\dot{y} = By \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dot{y}_1 = 2y_1 \\ \dot{y}_2 = 4y_2 \end{cases}$$

Soluzione : $y(t) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} y(0) =$

$$= \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{4t} \end{pmatrix} y(0)$$

con $y(0) = P^{-1}x(0)$

Quindi $\begin{cases} y_1(t) = y_1^0 e^{2t} \\ y_2(t) = y_2^0 e^{4t} \end{cases}$

- RISOLUZIONE DI $\dot{x} = Ax$

$$x(t) = P\,E(t)\,P^{-1}\,x(0)$$

$$P\,E(t)\,P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{4t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{2t} & -e^{2t} \\ e^{4t} & e^{4t} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^{2t}+e^{4t} & e^{4t}-e^{2t} \\ e^{4t}-e^{2t} & e^{4t}+e^{2t} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{e^{2t}}{2}\begin{pmatrix} e^{2t}+1 & e^{2t}-1 \\ e^{2t}-1 & e^{2t}+1 \end{pmatrix}$$

Quindi

$$\begin{cases} x_1(t) = \dfrac{e^{2t}}{2}\left[(e^{2t}+1)\,x_1^0 + (e^{2t}-1)\,x_2^0 \right] \\ x_2(t) = \dfrac{e^{2t}}{2}\left[(e^{2t}-1)\,x_1^0 + (e^{2t}+1)\,x_2^0 \right] \end{cases}$$

• RAPPRESENTAZIONE NELLO SPAZIO DELLE FASI

Per il problema $\dot{y} = Ay$ abbiamo la soluzione

$$\begin{cases} y_1(t) = y_1^0 e^{2t} \\ y_2(t) = y_2^0 e^{4t} \end{cases}$$

ricaviamo la t

$$\begin{cases} e^{2t} = \dfrac{y_1}{y_1^0} \\ e^{4t} = \dfrac{y_2}{y_2^0} \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} 2t = \log \dfrac{y_1}{y_1^0} \\ 4t = \log \dfrac{y_2}{y_2^0} \end{cases}$$

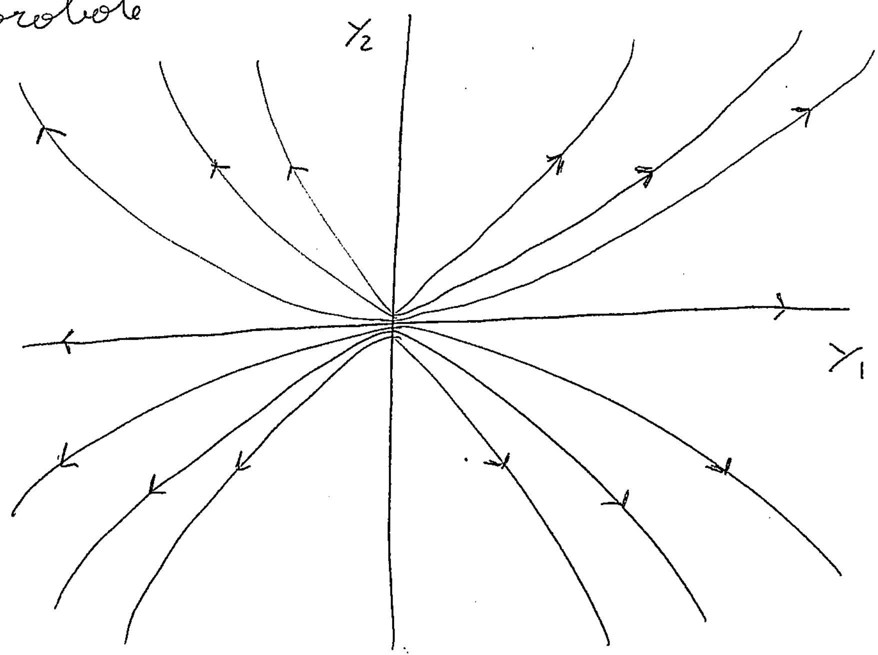
$$\rightsquigarrow \begin{cases} t = \dfrac{1}{2} \log \dfrac{y_1}{y_1^0} \\ t = \dfrac{1}{4} \log \dfrac{y_2}{y_2^0} \end{cases} \Rightarrow \log \dfrac{y_1}{y_1^0} = \dfrac{1}{2} \log \dfrac{y_2}{y_2^0}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{y_1}{y_1^0}\right)^2 = \frac{y_2}{y_2^0}$$

Abbiamo la seguente relazione tra y_1 e y_2:

$$y_2 = \frac{y_2^0}{(y_1^0)^2} y_1^2$$

Sono parabole

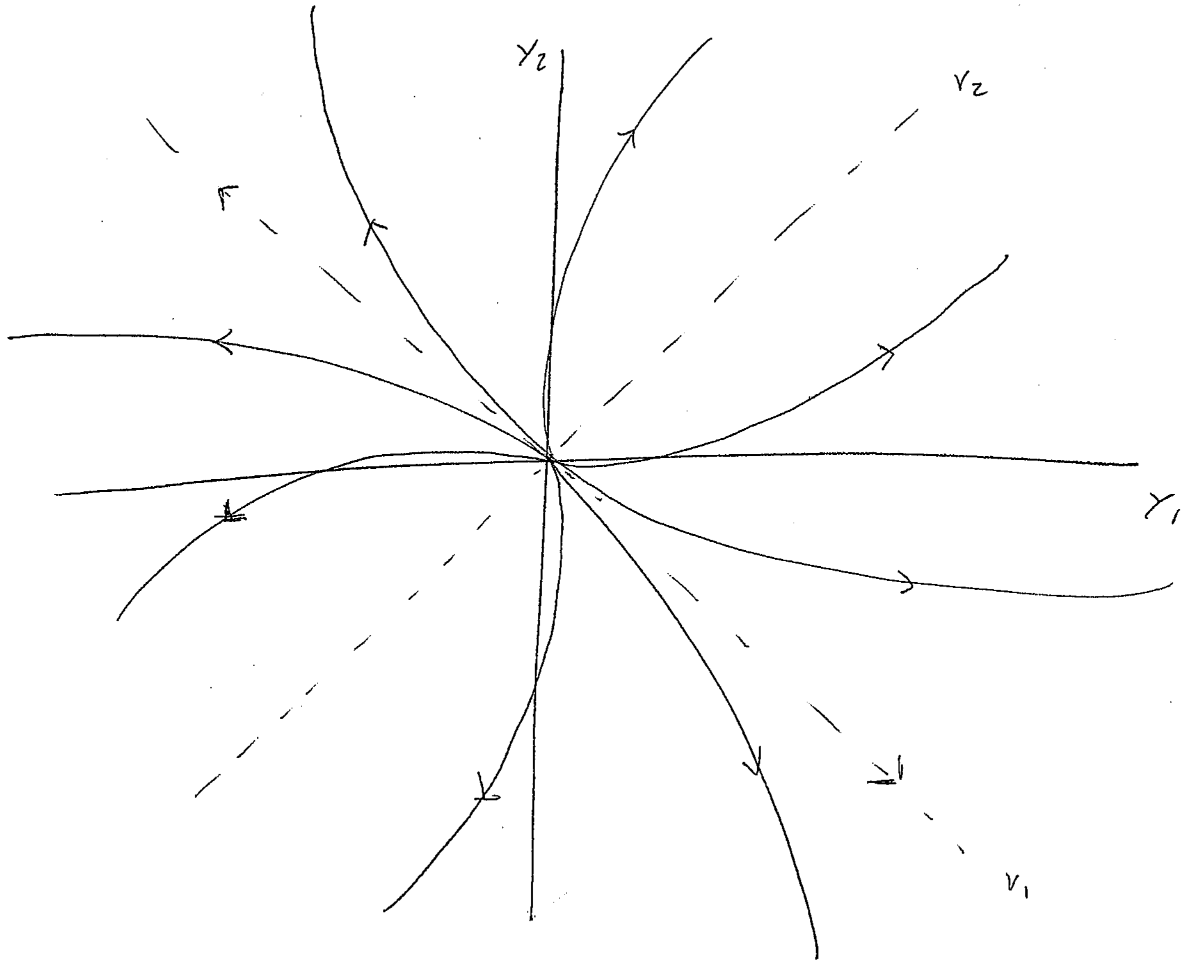


Consideriamo ora il problema $\dot{x} = Ax$

Abbiamo trovato la base di autovettori

$$\{v_1, v_2\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Per avere l'idea della rappresentazione dello spazio delle fasi nel piano x, possiamo utilizzare v_1 e v_2 come riferimento e ricavare le orbite per deformazione di quelle disegnate nel piano y



Esercizio 2 p 9 (1)

TROVARE AUTOVALORI E AUTOVETTORI PER LA MATRICE A, RISOLVERE IL SISTEMA LINEARE

$\dot{x} = Ax$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

• CALCOLO DI AUTOVALORI E AUTOVETTORI

$$\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda)(-1-\lambda)$$

$$(1-\lambda)(2-\lambda)(-1-\lambda) = 0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = 1 \\ \lambda_3 = 2 \end{array}\right\} \text{autovalori}$$

Sia $v = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

Dalla prima relazione $u_1 = -u_1 \Rightarrow u_1 = 0$

Dalla seconda $u_1 + u_2 = -u_2 \Rightarrow u_2 = -u_2 \Rightarrow u_2 = 0$

Dalla terza $u_1 - u_3 = -u_3 \Rightarrow u_3 = u_3 = K$

$$\Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

Dalla prima relazione $u_1 = u_1 = K$

Dalla seconda $u_1 + 2u_2 = u_2 \Rightarrow u_1 + u_2 = 0 \Rightarrow u_2 = -K$

Dalla terza $u_1 - u_3 = u_3 \Rightarrow 2u_3 = u_1 \Rightarrow u_3 = \frac{K}{2}$

Quindi $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1/2 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

Dalla prima relazione $u_1 = 2u_1 \Rightarrow u_1 = 0$

Dalla seconda $u_1 + 2u_2 = 2u_2 \Rightarrow u_2 = u_2 = K$

Dalla terza $u_1 - u_3 = u_3 \Rightarrow u_3 = -u_3 \Rightarrow u_3 = 0$

Quindi $V_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

<u>Autovettori</u> $V_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1/2 \end{pmatrix}$, $V_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Quindi $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$

• CALCOLO DI P^{-1}

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) =$$

Scambiare la prima e la terza riga

$$= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) =$$

Moltiplicare la seconda riga per -1

$$= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) =$$

Sostituire alla terza riga la terza meno la seconda

$$= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) =$$

Sostituire alla seconda riga la seconda più la terza

$$= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) =$$

Sostituire alla prima riga la prima meno $\frac{1}{2}$ per la seconda

$$= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Verifica:

$$P P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

• RISOLUZIONE DI $\dot{x} = Ax$ (9)

$$x(t) = P\,E(t)\,P^{-1}x(0)$$

con $E(t) = \text{diag}\left[e^{\lambda_1 t}, \dots e^{\lambda_n t}\right]$

$$P\,E(t)\,P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{e^{-t}}{2} & 0 & e^{-t} \\ e^{t} & 0 & 0 \\ e^{2t} & e^{2t} & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} e^{t} & 0 & 0 \\ e^{2t}-e^{t} & e^{2t} & 0 \\ \frac{e^{2t}-e^{-t}}{2} & 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$$

Quindi

$$\begin{cases} x_1(t) = x_1^0\,e^{t} \\ x_2(t) = x_1^0\,(e^{2t}-e^{t}) + x_2^0\,e^{2t} \\ x_3(t) = \frac{x_1^0}{2}\left(e^{2t}-e^{-t}\right) + x_3^0\,e^{-t} \end{cases}$$

Esercizio p. 15

1) Calcolare l'operatore norma per le trasformazioni lineari definite da:

(a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$

Ricordiamo la definizione di norma di una trasformazione lineare

$$\|T\| = \max_{|x|=1} |Tx|$$

Dobbiamo quindi calcolare

$$\max_{|x|=1} |Ax|$$

Se $x = (x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$|Ax|^2 = \left| \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 2x \\ -3y \end{pmatrix} \right| = 4x^2 + 9y^2$$

Dobbiamo massimizzare la funzione

$$f(x, y) = 4x^2 + 9y^2$$

soggetta al vincolo $|X| = 1$, cioè

$$g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$$

Usiamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange.

La lagrangiana è

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = 4x^2 + 9y^2 - \lambda(x^2 + y^2 - 1)$$

I punti critici sono soluzione di

$$\begin{cases} \mathcal{L}_x = f_x - \lambda g_x = 0 \\ \mathcal{L}_y = f_y - \lambda g_y = 0 \\ \mathcal{L}_\lambda = -g = 0 \end{cases}$$

Dato che $f_x = 8x \quad g_x = 2x$

$f_y = 18y \quad g_y = 2y$

Dobbiamo risolvere

$$\begin{cases} 8x - 2\lambda x = 0 \\ 18y - 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

per $x \neq 0$ otteniamo

$$\begin{cases} 8 - 2\lambda = 0 & \Rightarrow \lambda = 4 \\ 18y - 8y = 0 & \Rightarrow y = 0 \\ x^2 - 1 = 0 & \Rightarrow x = \pm 1 \end{cases}$$

cioè le soluzione $(1, 0, 4)$, $(-1, 0, 4)$

per $x = 0$ otteniamo

$$\begin{cases} y^2 - 1 = 0 & \Rightarrow y = \pm 1 \\ 18 = 2\lambda & \Rightarrow \lambda = 9 \end{cases}$$

cioè le soluzioni $(0, 1, 9)$, $(0, -1, 9)$

I punti critici sono quindi

$(1, 0)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$, $(0, -1)$.

Dato che $f(x,y)\Big|_{(1,0)} = f(x,y)\Big|_{(-1,0)} = 4$

e $f(x,y)\Big|_{(0,1)} = f(x,y)\Big|_{(0,-1)} = 9$

il massimo che cerchiamo è 9

$$\Rightarrow \|A\| = |\sqrt{9}| = 3$$

Esercizio p. 15 n 5

Calcolare l' esponenziale delle seguenti matrici:

(a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$

$$e^A = \begin{pmatrix} e^2 & 0 \\ 0 & e^{-3} \end{pmatrix}$$

(b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Ricordiamo che se $A = P \Lambda P^{-1}$ allora $e^A = P e^\Lambda P^{-1}$.

Proviamo a diagonalizzare A

$$|A - \lambda I| = \left| \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 0 & -1-\lambda \end{pmatrix} \right| =$$

$$= -(1-\lambda)(1+\lambda) = 0 \implies \boxed{\begin{array}{l} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = 1 \end{array}}$$ autovalori

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$x_1 + 2x_2 = -x_1 \implies \begin{array}{l} x_1 = -x_2 \\ x_2 = k \end{array} \qquad \boxed{v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$x_1 + 2x_2 = x_1 \qquad x_1 = k$$

$$-x_2 = x_2 \Rightarrow x_2 = 0$$

$$\boxed{v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Quindi

$$e^A = P\, e^\Lambda P^{-1}$$

con $\Lambda = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $e^\Lambda = \begin{pmatrix} e^{-1} & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow e^A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-1} & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & e^{-1} \\ e & e \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} e & e - e^{-1} \\ 0 & e^{-1} \end{pmatrix}$$

Esercizio p. 16 n 7

Calcolare gli esponenziali delle seguenti matrici

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Scriviamo $A = S + N$ con

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Proviamo che S e N commutano

$$SN = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$NS = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Quindi possiamo calcolare

$$e^A = e^{S+N} = e^S e^N$$

$$e^{S} = \begin{pmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & e^2 & 0 \\ 0 & 0 & e^2 \end{pmatrix}$$

Per calcolare e^{M} usiamo la definizione:

$$e^{M} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M^k}{k!}$$

$k = 0 \Rightarrow M^0 = I$

$k = 1 \Rightarrow M^1 = M$

$$k = 2 \Rightarrow M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

Quindi $e^{M} = I + M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Infine

$$e^{A} = e^{S} e^{M} = \begin{pmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & e^2 & 0 \\ 0 & 0 & e^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & e^2 & e^2 \\ 0 & 0 & e^2 \end{pmatrix}$$

Esercizio p. 16 n 8

Trovare 2 matrici A e B, 2×2, tali che

$$e^{A+B} \neq e^{A} e^{B}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Nota: Le matrici non commutano, infatti

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo $e^{A} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow e^{A} = I + A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo $e^{B} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B^k}{k!}$

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow e^{B} = I + B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Quindi $e^A e^B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ora calcoliamo e^{A+B}

$A + B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

autovalori : $\left| \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} \right| = \lambda^2 - 1 = 0$

$$\boxed{\lambda_1 = -1 \,, \quad \lambda_2 = 1}$$

autovettori : $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \quad x_2 = -x_1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = x_2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

Quindi $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$$P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Infine

$$e^{A+B} = P\, e^{\Lambda}\, P^{-1} \quad \text{con}$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Quindi

$$e^{A+B} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-1} & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-1} & -e^{-1} \\ e & e \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e+e^{-1} & e-e^{-1} \\ e-e^{-1} & e+e^{-1} \end{pmatrix}$$

Esercizio p. 13

5) Trovare la soluzione del sistema lineare $\dot{x} = A x$

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

Ricordiamo il corollario che ci dice che

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \Rightarrow e^{A} = e^{a} \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La soluzione del problema è quindi

$$x(t) = e^{At} x_0 =$$

$$= e^{2t} \begin{pmatrix} 1 & -t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{01} \\ x_{02} \end{pmatrix} =$$

$$= e^{2t} \begin{pmatrix} x_{01} - x_{02}\, t \\ x_{02} \end{pmatrix}$$

Quindi

$$\begin{cases} x_1(t) = e^{2t} (x_{01} - x_{02}\, t) \\ x_2(t) = x_{02}\, e^{2t} \end{cases}$$

b) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Ricordiamo il corollario che dice che

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \Rightarrow e^{A} = e^{a} \begin{pmatrix} \cos b & -\sin b \\ \sin b & \cos b \end{pmatrix}$$

La soluzione del problema è quindi

$$x(t) = e^{At} x_0 =$$

$$= e^{at} \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{01} \\ x_{02} \end{pmatrix} =$$

$$= e^{at} \begin{pmatrix} x_{01} \cos t - x_{02} \sin t \\ x_{01} \sin t + x_{02} \cos t \end{pmatrix}$$

Quindi

$$\begin{cases} x_1(t) = e^{at}(x_{01} \cos t - x_{02} \sin t) \\ x_2(t) = e^{at}(x_{01} \sin t + x_{02} \cos t) \end{cases}$$

c) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Se troviamo P t/c $P^{-1} A P = \text{diag}[\lambda_s]$

allora

$$e^{At} = P \, \text{diag}[e^{\lambda_s t}] \, P^{-1}$$

<u>Calcolo autovalori</u>

$$|A - \lambda I| = \left| \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} \right| = \lambda^2 - 1 = 0 \implies \boxed{\begin{matrix} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = 1 \end{matrix}}$$

<u>Calcolo autovettori</u>

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

$$\implies \begin{matrix} u_2 = -u_1 \\ u_1 = K \end{matrix} \qquad \implies \boxed{V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

$$\implies u_2 = u_1 = K \qquad \implies \boxed{V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

Quindi $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

Calcolo dell'inversa di P

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 1/2 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 & 1/2 \end{array}\right)$$

Quindi $\quad P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Calcolo di e^{At}

$$e^{At} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{t} \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-t} & -e^{-t} \\ e^{t} & e^{t} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{t} + e^{-t} & e^{t} - e^{-t} \\ e^{t} - e^{-t} & e^{t} + e^{-t} \end{pmatrix}$$

Soluzione del sistema

$$x(t) = e^{At} x_0$$

Quindi
$$\begin{cases} x_1(t) = \frac{1}{2}\left[(e^{t} + e^{-t})\, x_{01} + (e^{t} - e^{-t})\, x_{02}\right] \\ x_2(t) = \frac{1}{2}\left[(e^{t} - e^{-t})\, x_{01} + (e^{t} + e^{-t})\, x_{02}\right] \end{cases}$$

Esercizio p 26

1) Determinare se il sistema $\dot{x} = Ax$ ha una sella, un nodo, o una spirale nell' origine, e determinare la stabilità di ogni nodo e spirale.

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

Calcolo autovalori

$$\left| \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 4-\lambda \end{pmatrix} \right| = (1-\lambda)(4-\lambda) - 6 =$$

$$= 4 - \lambda - 4\lambda + \lambda^2 - 6 = \lambda^2 - 5\lambda - 2 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25+8}}{2}$$

$$\lambda_1 = \frac{5 - \sqrt{33}}{2} < 0$$

$$\lambda_2 = \frac{5 + \sqrt{33}}{2} > 0$$

autovalori reali di segno opposto

$\Rightarrow$ punto di sella nell' origine.

b) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

Vedi esercizio p. 8, n. 1, (a).

Autovalori $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$

Autovalori reali, distinti entrambi positivi

$\Rightarrow$ <u>nodo instabile</u>

(c) $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

<u>Calcolo autovalori</u>

$$\left| \begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ 2 & \lambda \end{pmatrix} \right| = \lambda^2 + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \pm i \sqrt{2}$$

Autovalori complessi coniugati puramente immaginari

$\Rightarrow$ <u>centro</u>

d) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

Calcolo autovalori

$$\left| \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 2 & 3-\lambda \end{pmatrix} \right| = (1-\lambda)(3-\lambda)+2 =$$

$$= 3-\lambda-3\lambda+\lambda^2+2 = \lambda^2-4\lambda+5 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16-20}}{2} = \frac{4 \pm i2}{2} = 2 \pm i$$

Autovalori complessi coniugati con parte reale positiva

$\Rightarrow$ spirale instabile

e) $A = \begin{pmatrix} \lambda & -2 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}$

Calcolo autovalori

$$|A - \mu I| = \left| \begin{pmatrix} \lambda-\mu & -2 \\ 1 & \lambda-\mu \end{pmatrix} \right| =$$

$$= (\lambda-\mu)^2 + 2 =$$

$$= \mu^2 - 2\lambda\mu + (\lambda^2+2) = 0$$

Dobbiamo studiare le soluzioni al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$ di

$$\mu^2 - 2\lambda\mu + (\lambda^2 + 2) = 0$$

(dove l'incognita è μ)

$$\mu_{1,2} = \frac{2\lambda \pm \sqrt{4\lambda^2 - 4\lambda^2 - 8}}{2} =$$

$$= \frac{2\lambda \pm \sqrt{-8}}{2} = \lambda \pm i\sqrt{2}$$

Caso 1 $\quad \lambda > 0 \quad$ spirale instabile

Caso 2 $\quad \lambda < 0 \quad$ spirale stabile

Caso 3 $\quad \lambda = 0 \quad$ centro

f) $A = \begin{pmatrix} \lambda & 2 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}$

<u>Calcolo autovalori</u>

$$\left| \begin{pmatrix} \lambda - \mu & 2 \\ 1 & \lambda - \mu \end{pmatrix} \right| = (\lambda - \mu)^2 - 2 =$$

$$= \mu^2 - 2\lambda\mu + (\lambda^2 - 2) = 0$$

studiamo le soluzioni di

$$\mu^2 - 2\lambda\mu + (\lambda^2 - 2) = 0$$

al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\mu_{1,2} = \frac{2\lambda \pm \sqrt{4\lambda^2 - 4\lambda^2 + 8}}{2}$$

$\Rightarrow \mu_1 = \lambda - \sqrt{2} \qquad \mu_2 = \lambda + \sqrt{2}$

<u>Caso 1</u> $\quad \lambda < -\sqrt{2} \Rightarrow \mu_1 < \mu_2 < 0$

<u>modo stabile</u>

<u>Caso 2</u> $\quad -\sqrt{2} < \lambda < \sqrt{2} \Rightarrow \mu_1 < 0 < \mu_2$

<u>punto di selle</u>

<u>Caso 3</u> $\quad \lambda \geq \sqrt{2} \Rightarrow 0 < \mu_1 < \mu_2$

<u>modo instabile</u>

Esercizio p. 32 n 2

Esercizi 09/02

Risolvere $\dot{x} = Ax$

con $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

Possiamo vedere A diviso in blocchi

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

e lavorare sui singoli blocchi.

Consideriamo quindi $\bar{A} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

e calcoliamone autovalori e autovettori

$$|\bar{A} - \lambda I| = \left|\begin{pmatrix} -\lambda & -2 \\ 1 & 2-\lambda \end{pmatrix}\right| = \lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{2 \pm \sqrt{4-8}}{2} \quad \Rightarrow \text{autovalori} \quad \boxed{\begin{aligned} \lambda &= 1+i \\ \bar{\lambda} &= 1-i \end{aligned}}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = (1+i) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2y_1 = (1+i)y_1 \\ y_1 + 2y_2 = (1+i)y_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_1 = (-1+i)y_2 \\ y_2 = k \end{cases}$$

$$\Rightarrow W = \begin{pmatrix} -1+i \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Per quanto riguarda A abbiamo

due autovalori complessi coniugati

$$\lambda = 1 + i$$

$$\bar{\lambda} = 1 - i$$

un autovalore reale

$$\mu = -2$$

Ad essi corrispondono gli autovettori

$$W = \begin{pmatrix} -1+i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overline{W} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - i \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$V = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Quindi per calcolare la soluzione uso

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dato che $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

La soluzione è

$$x(t) = P \begin{pmatrix} e^{t}\cos t & -e^{t}\sin t & 0 \\ e^{t}\sin t & e^{t}\cos t & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2t} \end{pmatrix} P^{-1} x_0 .$$

Esercizio 4 p. 32

Risolvere $\dot{x} = Ax$ con

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Possiamo pensare A divisa in blocchi

$$\left(\begin{array}{cc|cc} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

e lavorare sui singoli blocchi

Calcoliamo autovettori e autovalori per le matrici

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$|A_1 - \lambda I| = \left| \begin{pmatrix} -1-\lambda & -1 \\ 1 & -1-\lambda \end{pmatrix} \right| =$$

$$= (1+\lambda)^2 + 1 = \lambda^2 + 2\lambda + 2$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{-2 \pm \sqrt{4-8}}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} \lambda_1 &= -1+i \\ \lambda_2 &= -1-i \end{aligned}}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = (-1+i) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -y_1 - y_2 = (-1+i)\, y_1 \\ y_1 - y_2 = (-1+i)\, y_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1 = i\, y_2 = i k \\ y_2 = k \end{cases}$$

$$w_1 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overline{w_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - i \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$|A_2 - \lambda I| = \lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$$

$$\lambda = \frac{2 \pm \sqrt{4-8}}{2}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \lambda_2 &= +1+i \\ \lambda_2 &= +1-i \end{aligned}}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = (+1+i)\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -2y_2 = (1+i)\,y_1 \\ y_1 + 2y_2 = (1+i)\,y_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = (-1+i)\,y_2 \\ y_2 = k \end{cases}$$

$$w_2 = \begin{pmatrix} -1+i \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overline{w_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} - i\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Quindi A ha <u>autovalori</u>

$$\lambda_1 = -1+i \; ; \; \overline{\lambda_1} = -1-i \; ; \; \lambda_2 = 1+i \; ; \; \overline{\lambda_2} = 1-i$$

e <u>autovettori</u>

$$w_1 = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{u_1} + i\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{v_1} \qquad \overline{w_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - i\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$w_2 = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{u_2} + i\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{v_2} \qquad \overline{w_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - i\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Quindi

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Infine abbiamo la soluzione

$$x(t) = P \operatorname{diag} e^{a_3 t} \begin{bmatrix} \cos b_3 t & -\sin b_3 t \\ \sin b_3 t & \cos b_3 t \end{bmatrix} P^{-1} x_0 =$$

$$= P \begin{bmatrix} e^{-t}\cos t & -e^{-t}\sin t & 0 & 0 \\ e^{-t}\sin t & e^{-t}\cos t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{t}\cos t & -e^{t}\sin t \\ 0 & 0 & e^{t}\sin t & e^{t}\cos t \end{bmatrix} P^{-1} x_0$$

Esercizio p. 37 n 1, (a)

Risolvere $\dot{x} = A x$ con

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Calcolo autovalori

$$|A - \lambda I| = \left| \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & 2-\lambda \end{pmatrix} \right| = -\lambda(2-\lambda) + 1 =$$

$$= \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2$$

Autovalori $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$

Dato che l'unico autovalore trovato ha molteplicità 2 uguale alla dimensione della matrice non abbiamo bisogno di calcolare la base di autovettori generalizzati. Infatti abbiamo

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$N = A - S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Osserviamo che

$$M^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Quindi

$$x(t) = e^{\lambda t} [I + M t] x_0 =$$

$$= e^{\lambda t} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -t & t \\ -t & t \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} x_{01} \\ x_{02} \end{pmatrix} =$$

$$= e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1-t & t \\ -t & 1+t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{01} \\ x_{02} \end{pmatrix}$$

cioè

$$\begin{cases} x_1(t) = e^{\lambda t} [(1-t) x_{01} + x_{02} t] \\ x_2(t) = e^{\lambda t} [-x_{01} t + x_{02} (1+t)] \end{cases}$$

Esercizio 2 p. 38 (c)

Risolvere $\dot{x} = Ax$ con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Autovalori $\lambda_1 = 1$

$\lambda_2 = \lambda_3 = 2$

Dobbiamo cercare una base di autovettori generalizzati, cioè vettori $v = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ tali che

$$(A - \lambda I)^k v = 0$$

dove, per $\lambda = 1$ abbiamo $k = 1$

per $\lambda = 2$ abbiamo $k = 1$, $k = 2$.

Nel caso di $\lambda = 1$ abbiamo quindi

$$(A - 1\,I)\,v = 0$$

cioè
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = 0$$

Quindi noi abbiamo

$$\begin{cases} y_1 = k \\ -y_1 + y_2 = 0 \\ y_1 + y_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = k \\ y_2 = k \\ y_3 = -k \end{cases}$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Nel caso di $\lambda = 2$ dobbiamo risolvere

$$(A - 2I)\, v = 0$$

$$(A - 2I)^2 v = 0$$

$$(A - 2I)\, v = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$(A - 2I)^2 v = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = 0$$

ricaviamo la condizione $y_1 = 0$

Quindi $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Ora definiamo $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

e calcoliamo P^{-1}

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Quindi $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Allora

$$S = P \operatorname{diag}[\lambda_S] P^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$N = A - S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= 0$$

Quindi

$$x(t) = P \operatorname{diag}\left[e^{\lambda_s t} \right] P^{-1} x_0 =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{20} \\ x_{30} \end{pmatrix}$$

Esercizio 1 p. 47

Trovare la forma canonica di Jordan per

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ è già in forma di Jordan

(b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ è già in forma di Jordan

(c) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

autovalori $|A - \lambda I| = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 1 = 0$

$\lambda_{1,2} = \pm 1$

è diagonalizzabile $\Rightarrow J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

(f) $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ è già in forma di Jordan

Infatti ha autovalori

$\lambda = \pm i$

Esercizio p. 49 n 6 (d)

Trovare la formula canonica di Jordan per

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$\lambda = 2$ è un autovalore con molteplicità 3

Per prima cosa calcoliamo gli indici di difetto

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \delta_1 = 1$$

$$(A - \lambda I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \delta_2 = 2$$

$$(A - \lambda I)^3 = \underline{0} \Rightarrow \delta_3 = 0$$

(1) Scegliamo una base $\{v_j^{(1)}\}_{j=1}^{\delta_1}$ per

$$\ker(A - \lambda I)$$

dato che $\delta_1 = 1$, stiamo cercando un solo vettore $v_1^{(1)}$

Poniamo $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ e risolviamo

$$(A - \lambda I) v = 0$$

Abbiamo le relazioni

$$\begin{cases} x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_2 = x_3 = 0$$

Quindi $v_1^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

(2) Cerchiamo una base $\{V_s^{(1)}\}_{s=1}^{\delta_1}$ per $\ker(A - \lambda I)$ tale che

$$(A - \lambda I) v_s^{(2)} = V_s^{(1)}$$

abbia $\delta_2 - \delta_1$ soluzioni linearmente indipendenti $v_s^{(2)}$, $s = 1 \dots \delta_2 - \delta_1$

Nel nostro caso $\delta_2 - \delta_1 = 2 - 1 = 1$

Poniamo $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ e richiediamo

$$(A - \lambda I) v = V_1^{(1)} \in \operatorname{span}\{v_1^{(1)}\}$$

$V_1^{(1)}$ deve appartenere a $\operatorname{span}\{v_1^{(1)}\}$ perché comunque deve essere in $\ker(A - \lambda I)$

Nel nostro caso scegliamo semplicemente

$$V_1^{(1)} = v_1^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Abbiamo quindi le relazioni

$$\begin{cases} x_2 + x_3 = 1 \\ x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_2 = 1$$

Quindi scegliamo

$$v_1^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Troviamo una base per $\operatorname{Ker}(A - \lambda I)^2$

data che

$$\{v_j^{(2)}\}_{j=1}^{\delta_2} = \{V_j^{(1)}\}_{j=1}^{\delta_1} \cup \{v_j^{(2)}\}_{j=1}^{\delta_2-\delta_1}$$

Che nel nostro caso è

$$\{v_j^{(2)}\}_{j=1}^{2} = \{V_1^{(1)}\} \cup \{v_1^{(2)}\} =$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

(3) Cerchiamo una base $\{V_j^{(2)}\}_{j=1}^{\delta_2}$

per $\mathrm{Ker}\,(A-\lambda I)^2$ con

$V_j^{(2)} \in \mathrm{span}\,\{v_j^{(2)}\}_{j=1}^{\delta_2-\delta_1}$ per $j = 1 \dots \delta_2-\delta_1$

tale che

$$(A-\lambda I)\,v_j^{(3)} = V_j^{(2)}$$

abbia $\delta_3-\delta_2$ soluzioni linearmente indipendenti $v_j^{(3)}$ per $j=1 \dots \delta_3-\delta_2$.

Nel nostro caso $\delta_2-\delta_1 = 2-1 = 1$

$$\delta_3 - \delta_2 = 3-2 = 1$$

La condizione

$$V_j^{(2)} \in \mathrm{span}\,\{v_j^{(2)}\}_{j=1}^{\delta_2-\delta_1}$$

per $j=1 \dots \delta_2-\delta_1$

diventa

$$V_1^{(2)} \in \mathrm{span}\,\{v_1^{(2)}\}$$

cioè possiamo scegliere

$$V_1^{(2)} = v_1^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ponendo $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ risolviamo

$$(A - \lambda I)\, v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ottenendo le relazioni

$$\begin{cases} x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = -2 \\ x_3 = 1 \end{cases}$$

da cui otteniamo

$$v_1^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Se per $s = 1 \dots \delta_2 - \delta_1$ $\quad V_s^{(2)} = \sum_{i=1}^{\delta_2 - \delta_1} c_i\, v_i^{(2)}$

poniamo $\bar{V}_s^{(1)} = \sum_{i=1}^{\delta_2 - \delta_1} c_i\, V_i^{(1)}$

e $\bar{V}_s^{(1)} = V_s^{(1)}$ per $s = (\delta_2 - \delta_1 + 1), \dots \delta_1$

Nel nostro caso $\bar{V}_1^{(1)} = V_1^{(1)}$

Otteniamo una base per $\ker(A-\lambda I)^3$ data che

$$\{v_j^{(3)}\}_{j=1}^{\delta_3} = \{\bar{V}_j^{(1)}\}_{j=1}^{\delta_1} \cup \{V_j^{(2)}\}_{j=1}^{\delta_2-\delta_1} \cup \{v_j^{(3)}\}_{j=1}^{\delta_3-\delta_2}$$

Nel nostro caso

$$\{v_j^{(3)}\}_{j=1}^{3} = \{\bar{V}_1^{(1)}\} \cup \{V_1^{(2)}\} \cup \{v_1^{(3)}\} =$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

(4) Se $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ continuiamo fino a $\delta_k = n$.

Nel nostro caso $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ quindi abbiamo finito.

Definiamo ora $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

e quindi $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Calcoliamo

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = J$$

J è la forma canonica di Jordan relativa alla matrice A.

PROBLEMI PROPOSTI PARAGRAFO 2.6 (pag. 103-104)

1.(a) - Classificare i punti di equilibrio (come pozzi, sorgenti o selle) del sistema non lineare

$$\dot{x} = f(x)$$

dove $f(x) = \begin{pmatrix} x_1 - x_1 x_2 \\ x_2 - x_1^2 \end{pmatrix}$

RISOLUZIONE

Sono punti di equilibrio le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x_1 - x_1 x_2 = 0 \\ x_2 - x_1^2 = 0 \end{cases} \quad \text{ovvero} \quad \begin{cases} x_1(1-x_2) = 0 \\ x_2 = x_1^2 \end{cases}$$

che ha per soluzione

i) $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \quad O = (0,0)$ ii) $\begin{cases} x_2 = 1 \\ x_1^2 = 1 \end{cases} \quad \begin{matrix} A = (-1,1) \\ B = (1,1) \end{matrix}$

Risulta poi

$$Df(x) = \begin{pmatrix} 1-x_2 & -x_1 \\ -2x_1 & 1 \end{pmatrix}$$ per cui

$$Df(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \lambda_1 = 1 = \lambda_2$$

$$Df(-1,1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad -\lambda(1-\lambda) - 2 = 0$$

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \quad \lambda = \frac{1 \mp \sqrt{1+8}}{2} \begin{matrix} \nearrow -1 \\ \searrow 2 \end{matrix}$$

$$Df(1,1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad (1-\lambda)^2 - 2 = 0, \; (1-\lambda) = \mp\sqrt{2}$$

$$\lambda_1 = 1-\sqrt{2}, \; \lambda_2 = 1+\sqrt{2}$$

Perciò $(0,0)$ è un nodo repulsivo per il lineare associato e quindi $(0,0)$ è una sorgente per il non lineare;
$A=(-1,1)$ è una sella sia per il lineare che per il non lineare;
$B=(1,1)$ è ancora una sella sia per il lineare che per il non lineare.

1.(e) - Dopo aver verificato che l'origine è un punto di equilibrio, ~~Classificare i punti di equilibrio~~ classificarlo (come pozzo, sorgente o sella) ~~del~~ nel caso del sistema non lineare

$$\dot{x} = f(x),$$

dove

$$f(x) = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ k x_1 - x_2 - x_1 x_3 \\ x_1 x_2 - x_3 \end{pmatrix}$$

RISOLUZIONE

Sono punti di equilibrio le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x_2 - x_1 = 0 \\ K x_1 - x_2 - x_1 x_3 = 0 \\ x_1 x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \quad \text{ovvero} \quad \begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_3 = x_1 x_2 = x_2^2 \\ K x_2 - x_2 - x_2^3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_3 = x_2^2 \\ (k - 1 - x_2^2) x_2 = 0 \end{cases}$$

le cui soluzioni sono l'unione delle soluzioni di due sistemi

$$\begin{cases} x_2 = 0 \\ x_1 = x_2 = 0 \\ x_3 = x_2^2 = 0 \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} x_2^2 = K - 1 \\ x_1 = x_2 \\ x_3 = x_2^2 \end{cases}$$

Se $K < 1$ il secondo sistema non ha soluzione; se $K = 1$ le soluzioni del secondo sistema coincidono con quelle del primo.

Se $K > 1$ il secondo sistema ha per soluzione l'unione delle soluzioni dei due sistemi

$$\begin{cases} x_2 = -\sqrt{K-1} \\ x_3 = K-1 \\ x_1 = x_2 = -\sqrt{K-1} \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} x_2 = \sqrt{K-1} \\ x_3 = K-1 \\ x_1 = x_2 = \sqrt{K-1} \end{cases}$$

~~[illegible]~~ I punti di equilibrio del sistema di partenza sono perciò:

i) se $K \leq 1$ solo $O = (0,0,0)$;

ii) se $K > 1$ allora $O = (0,0,0)$, $A = \left(-\sqrt{K-1}, -\sqrt{K-1}, K-1\right)$, $B = \left(\sqrt{K-1}, \sqrt{K-1}, K-1\right)$.

Risulta poi

$$Df(x) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ K - x_3 & -1 & -x_1 \\ x_2 & x_1 & -1 \end{pmatrix}$$

Si ha

$$Df(0,0,0) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ K & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$Df\left(-\sqrt{K-1}, -\sqrt{K-1}, K-1\right) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & \sqrt{K-1} \\ -\sqrt{K-1} & -\sqrt{K-1} & -1 \end{pmatrix}$$

$$Df\left(\sqrt{K-1},\ \sqrt{K-1},\ K-1\right)=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & -\sqrt{K-1}\\ \sqrt{K-1} & \sqrt{K-1} & -1\end{pmatrix}$$

Calcoliamo gli autovalori per le tre matrici:

$$\det\begin{pmatrix}-1-\lambda & 1 & 0\\ K & -1-\lambda & 0\\ 0 & 0 & -1-\lambda\end{pmatrix}=(-1-\lambda)\det\begin{pmatrix}-1-\lambda & 1\\ K & -1-\lambda\end{pmatrix}=$$

$$=(-1-\lambda)\left[(-1-\lambda)^2-K\right]=0 \quad \text{per}$$

$$\boxed{\lambda_1=-1} \qquad -1-\lambda=\mp\sqrt{K}$$

$$\boxed{\lambda_2=-1-\sqrt{K}} \qquad \boxed{\lambda_3=-1+\sqrt{K}}$$

Distinguiamo due casi:

i) se $K<0$, λ_2 e λ_3 sono complessi coniugati con $Re(\lambda_2)=Re(\lambda_3)=-1=Re(\lambda_1)$. In tal caso l'origine è un pozzo.

ii) se $K>0$, i tre autovalori sono reali. In tal caso $\lambda_1<0$, $\lambda_2<0$ mentre per λ_3 si ha

ii.1) se $K>1$, $\lambda_3>0$ e l'origine è una sella,

ii.2) se $0<K<1$, $\lambda_3<0$ e l'origine è un pozzo,

ii.3) se $K=1$, allora $\lambda_3=0$ e l'origine è un punto di equilibrio non iperbolico.

Per i punti A e B i conti sono noiosi! e poco istruttivi!

PROBLEMI PROPOSTI PARAGRAFO 2.9 (pag 133-135)

3. Usare la funzione di Liapunov

$$V(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

per mostrare che l'origine è un punto di equilibrio asintoticamente stabile per il sistema

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_2 - x_1x_2^2 + x_3^2 - x_1^3 \\ x_1 + x_3^3 - x_2^3 \\ -x_1x_3 - x_3x_1^2 - x_2x_3^2 - x_3^5 \end{pmatrix}$$

Mostrare che le traiettorie del sistema linearizzato $\dot{x} = Df(0)x$ per tale problema ~~appartengono ad un cerchio~~ stanno in cerchi paralleli al piano x_1x_2; quindi l'origine è stabile ma non asintoticamente stabile per il ~~sta~~ sistema linearizzato.

Risoluzione

Risulta

$$\dot{V}(x_1,x_2,x_3) = 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2 + 2x_3\dot{x}_3 =$$

$$= 2x_1(-x_2 - x_1x_2^2 + x_3^2 - x_1^3) + 2x_2(x_1 + x_3^3 - x_2^3) +$$

$$+ 2x_3(-x_1x_3 - x_3x_1^2 - x_2x_3^2 - x_3^5) =$$

$$= -\cancel{2x_1x_2} - 2x_1^2x_2^2 + \cancel{2x_1x_3^2} - 2x_1^4 + \cancel{2x_1x_2} + \cancel{2x_2x_3^3} +$$

$$- 2x_2^4 - \cancel{2x_1x_3^2} - 2x_3^2x_1^2 - \cancel{2x_2x_3^3} - 2x_3^6 =$$

$$= -2x_1^4 - 2x_2^4 - 2x_3^6 - 2x_1^2x_2^2 - 2x_1^2x_3^2 < 0$$

$\forall (x_1,x_2,x_3) \neq (0,0,0)$. Perciò l'origine è asintoticamente stabile.

E6

Il sistema lineare associato in un intorno dell'origine è dato da

$$
\begin{cases}
\dot{x}_1 = -x_2 \\
\dot{x}_2 = x_1 \\
\dot{x}_3 = 0
\end{cases}
\qquad
\begin{cases}
\ddot{x}_1 = -\dot{x}_2 = -x_1 \\
x_2 = -\dot{x}_1 \\
x_3(t) = c_3
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
x_1(t) = c_1 \operatorname{sen} t + c_2 \cos t \\
x_2(t) = -c_1 \cos t + c_2 \operatorname{sen} t \\
x_3(t) = c_3
\end{cases}
$$

Si ha

$$
x_1^2(t) + x_2^2(t) = c_1^2 \operatorname{sen}^2 t + c_2^2 \cos^2 t + 2\,\cancel{c_1 c_2 \operatorname{sen} t \cos t} +
$$
$$
+ c_1^2 \cos^2 t + c_2^2 \operatorname{sen}^2 t - 2\,\cancel{c_1 c_2 \operatorname{sen} t \cos t} =
$$
$$
= c_1^2 + c_2^2 = r^2
$$

che conclude la verifica richiesta.

~~4.1 Nel paragrafo~~

4. Dalla classificazione dei sistemi lineari 2×2 sappiamo che l'origine è un <u>centro</u> per il sistema lineare

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Aggiungere un termine non lineare a destra di tale sistema lineare cambia la stabilità dell'origine. Usare la funzione di Liapunov

$$V(x,y) = x^2 + y^2$$

per stabilire i seguenti risultati:

a) l'origine è un punto di equilibrio asintoticamente stabile per

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x^3 - xy^2 \\ -y^3 - x^2 y \end{pmatrix}$$

b) l'origine è un punto di equilibrio instabile per

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x^3 + xy^2 \\ y^3 + x^2 y \end{pmatrix}$$

c) l'origine è un punto di equilibrio stabile che non è asintoticamente stabile per

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -xy \\ x^2 \end{pmatrix}$$

Cosa sono le curve soluzione in tal caso?

RISOLUZIONE

Si ha $\dot V(x,y) = 2x\dot x + 2y\dot y$

Pertanto:

a) ~~[illegible]~~ Visto che

$$\begin{cases} \dot x = -y - x^3 - xy^2 \\ \dot y = x - y^3 - x^2 y, \end{cases}$$

si ha $\dot V(x,y) = 2x(-y-x^3-xy^2) + 2y(x-y^3-x^2y) =$

$= \cancel{-2xy} - 2x^4 - 2x^2y^2 + \cancel{2xy} - 2y^4 - 2x^2y^2$

$= -2(x^2+y^2)^2 < 0 \quad \forall (x,y) \neq (0,0)$,

per cui l'origine è asintoticamente stabile.

b) Visto che

$$\begin{cases} \dot x = -y + x^3 + xy^2 \\ \dot y = x + y^3 + x^2 y, \end{cases}$$

si ha $\dot V(x,y) = 2(x^2+y^2)^2 > 0 \quad \forall (x,y) \neq (0,0)$,

avendo utilizzato i conti del caso precedente.

Pertanto l'origine è un punto di equilibrio instabile.

c) Visto che

$$\begin{cases} \dot x = -y - xy \\ \dot y = x + x^2, \end{cases}$$

si ha $\dot V(x,y) = 2x(-y-xy) + 2y(x+x^2) =$

$$= -\cancel{2xy} - \cancel{2x^2y} + \cancel{2xy} + \cancel{2x^2y} \equiv 0$$

L'origine in tal caso è un punto di equilibrio stabile.

Risulta poi che $V(x,y) = K^2$ contiene le orbite del sistema dinamico. Perciò

$x^2 + y^2 = K^2$, ossia le traiettorie del sistema stanno su circonferenze concentriche che contengono al loro interno l'origine.

L'origine è un centro, dunque un punto di equilibrio stabile che non è asintoticamente stabile.

PROBLEMI PROPOSTI PARAGRAFO 2.10 (pag. 144-145)

(1.e) Scrivere il seguente sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + x^5 \\ \dot{y} = x + y^5 \end{cases}$$

in coordinate polari e determinare se l'origine è un centro, un fuoco stabile o un fuoco instabile

<u>RISOLUZIONE</u>

Si ha

$$\dot{r} = \frac{x\dot{x} + y\dot{y}}{r} = \frac{-\cancel{xy} + x^6 + \cancel{xy} + y^6}{r}$$

$$= \frac{r^6 \cos^6\vartheta + r^6 \operatorname{sen}^6\vartheta}{r} = r^5\left(\cos^6\vartheta + \operatorname{sen}^6\vartheta\right)$$

$$> 0 \quad \forall\, r > 0,$$

$$\dot{\vartheta} = \frac{x\dot{y} - y\dot{x}}{r^2} = \frac{x^2 + xy^5 + y^2 - x^5 y}{r^2} =$$

$$= \frac{r^2 + r^6 \cos\vartheta \operatorname{sen}^5\vartheta - r^6 \cos^5\vartheta \operatorname{sen}\vartheta}{r^2}$$

$$= 1 + r^4\left(\operatorname{sen}^4\vartheta - \cos^4\vartheta\right) \operatorname{sen}\vartheta \cos\vartheta$$

Poichè $\dot{r} > 0$, l'origine è instabile. Inoltre per r suff$^{\underline{nte}}$ piccolo, si ha $\dot{\vartheta} > 1/2$ e dunque

$\lim_{t \to -\infty} \vartheta(t) = -\infty$. L'origine è dunque un fuoco instabile.

4. Determinare la natura dei punti critici per i seguenti sistemi dinamici non lineari (essere il più specifici possibili!)

$$\begin{cases} \dot{x} = -4y + 2xy - 8 \\ \dot{y} = 4y^2 - x^2 \end{cases}$$

Il secondo membro è di classe $C^2(\mathbb{R}^2)$, anzi analitica intera (essendo un polinomio)

RISOLUZIONE

I punti critici sono dati dalle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} -4y + 2xy - 8 = 0 \\ 4y^2 - x^2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \mp 2y \\ -4y + 2xy - 8 = 0 \end{cases}$$

i) $\begin{cases} x = -2y \\ -4y - 4y^2 - 8 = 0 \end{cases}$

$y^2 + y + 2 = 0$

$y = \dfrac{-1 \mp \sqrt{1-8}}{2}$

non ha sol. reali

ii) $\begin{cases} x = 2y \\ -4y + 4y^2 - 8 = 0 \end{cases}$

$y^2 - y - 2 = 0$

$y = \dfrac{1 \mp \sqrt{1+8}}{2} \begin{cases} -1 \\ 2 \end{cases}$

I due punti critici sono $A = (-2, -1)$ e $B = (4, 2)$.

Risulta poi

$$Df(x,y) = \begin{pmatrix} 2y & -4 + 2x \\ -2x & 8y \end{pmatrix}$$

$$Df(-2,-1) = \begin{pmatrix} -2 & -8 \\ 4 & -8 \end{pmatrix}$$

Il suo polinomio caratteristico è

$$(-2-\lambda)(-8-\lambda)+32=0$$

$$16+2\lambda+8\lambda+\lambda^2+32=0$$

$$\lambda^2+10\lambda+48=0$$

$$\lambda = -5 \mp \sqrt{25-48} = -5 \mp i\sqrt{23}$$

Per il sistema lineare associato A è un fuoco stabile. Dunque A è un fuoco stabile anche per il non lineare.

Passiamo a studiare B:

$$Df(4,2) = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -8 & 16 \end{pmatrix}$$

Il suo polinomio caratteristico è $(4-\lambda)(16-\lambda)+32=0$

$$64-4\lambda-16\lambda+\lambda^2+32=0$$

$$\lambda^2-20\lambda+96=0$$

$$\lambda = 10 \mp \sqrt{100-96} = 10 \mp 2 \begin{cases} 8 \\ 12 \end{cases}$$

B è un nodo instabile per il lineare associato. Dunque B è un nodo instabile anche per il non lineare.

2.11 - PUNTI CRITICI NON IPERBOLICI IN $\mathbb{R}^2$

In questo paragrafo presentiamo alcuni risultati sui punti critici non iperbolici per sistemi analitici 2x2.
Assumiamo che l'origine è un punto critico isolato per il sistema 2x2

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x,y) \\ \dot{y} = Q(x,y) \end{cases} \qquad (1)$$

dove P e Q sono analitiche in un intorno dell'origine.
Assumiamo che la matrice $A = Df(0)$ del sistema lineare associato in un intorno dell'origine abbia uno o due autovalori nulli sebbene $A \neq 0$.
Per prima cosa, si osservi che se P e Q iniziano con termini di grado m P_m e Q_m, allora dal teorema 2 del paragrafo 2.10 segue che, se la funzione

$$g(\vartheta) = \cos\vartheta\, Q_m(\cos\vartheta, \operatorname{sen}\vartheta) - \operatorname{sen}\vartheta\, P_m(\cos\vartheta, \operatorname{sen}\vartheta)$$

non è identicamente zero, allora vi sono al più $2(m+1)$ direzioni $\vartheta = \vartheta_0$ lungo cui una traiettoria di (1) può tendere verso l'origine.

Tali direzioni sono date dalle soluzioni dell'equazione $g(\vartheta) = 0$.
Supponiamo che $g(\vartheta)$ non sia identicamente nulla: allora, le curve soluzione del sistema dinamico (1) che tendono verso l'origine lungo tali tangenti, dividono un intorno dell'origine in un numero finito di regioni aperte dette <u>settori</u>. Tali settori saranno

classificati in tre tipi come vedremo nelle prossime definizioni.
Le traiettorie che stanno al bordo di un settore iperbolico prendono il nome di <u>separatrici</u>.

<u>DEFINIZIONE</u>. Un settore che è topologicamente equivalente al settore mostrato in FIGURA (1a) è detto settore iperbolico.
Un settore che è topologicamente equivalente al settore mostrato in FIGURA (1b) prende il nome di SETTORE PARABOLICO.
Un settore che è topologicamente equivalenti al settore mostrato in FIGURA (1c) prende il nome di SETTORE ELLITTICO.

Nella definizione qui sopra l'omeomorfismo che stabilisce l'equivalenza topologica di un settore con uno dei settori della FIGURA 1 non conserva necessariamente la direzione del flusso. Vale a dire che ogni settore della FIGURA 1 ~~che~~ con le frecce nella direzione opposta è un settore dello stesso tipo. Per esempio, una sella ha un intorno bucato costituito da quattro settori iperbolici e quattro separatrici; Un nodo proprio ha un intorno bucato costituito da un settore parabolico.

OSSERVAZIONE. Un punto critico x_0 di (1) per il quale $Df(x_0)$ ha un autovalore nullo è detto spesso un punto critico multiplo. La ragione di ciò sarà chiara nel paragrafo 4.2 quando mostreremo che un punto critico multiplo di (1) può essere ~~[illegible]~~ splittato in un certo numero di punti critici iperbolici attraverso un'opportuna perturbazione di (1).

Esercizi
Venerdì
23/02

Esercizio 2 p. 38

(b) Risolvere $\dot{x} = A x$

con $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Autovalori $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$

$\lambda_3 = 1$

Autovettori

per $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$

Sia $v = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$

Vogliamo $(A - \lambda_1 I)\, v = 0$

cioè $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = 0$

Abbiamo $\begin{cases} y_2 - y_3 = 0 \\ y_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow y_2 = y_3 = 0$

Prendiamo $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Dobbiamo trovare quindi un <u>autovettore generalizzato</u> relativo a $\lambda = -1$
e indipendente da v_1

Risolviamo

$$(A - \lambda I)^2 v = 0$$

$$(A - \lambda I)^2 v = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} v =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = 0$$

Abbiamo $y_3 = 0$

Quindi possiamo scegliere $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Infine cerchiamo un autovalore per $\lambda_3 = 1$

Vogliamo

$$(A - \lambda_3 I)\, v = 0$$

cioè
$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = 0$$

Abbiamo
$$\begin{cases} -2y_1 + y_2 - 2y_3 = 0 \\ -2y_2 + 4y_3 = 0 \end{cases}$$

Quindi
$$\begin{cases} y_1 = -\frac{1}{2}\left[-2k + 2k\right] = 0 \\ y_2 = 2k \\ y_3 = k \end{cases} \Rightarrow v_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Abbiamo quindi

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$S = P \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & +2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$N = A - S = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad N^3 = \underline{0}$$

Quindi la soluzione del problema è

$$X(t) = P \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{t} \end{pmatrix} P^{-1} \left[I + Nt + \frac{N^2 t^2}{2} \right] x_0$$

$$\Rightarrow \quad x(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} & te^{-t} & e^{-t}\left(\frac{t^2}{2} - 2t\right) \\ 0 & e^{-t} & te^{-t} + 2(e^{t} - e^{-t}) \\ 0 & 0 & e^{t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{01} \\ x_{02} \\ x_{03} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1(t) = x_{01} e^{-t} + x_{02} t e^{-t} + x_{03} e^{-t} \left(\frac{t^2}{2} - 2t \right) \\ x_2(t) = x_{02} e^{-t} + x_{03} \left[t e^{-t} + 2 \left(e^{t} - e^{-t} \right) \right] \\ x_3(t) = x_{03} \, e^{t} \end{cases}$$

Esercizio p. 49 n 6 (g)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Trovare la Forma di Jordan

A ha un solo autovalore $\lambda = 2$ di molteplicità 4

Calcoliamo gli indici di difetto

$\delta_1 = \dim \operatorname{Ker} (A - \lambda I) =$

$$= \dim \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

$\delta_2 = \dim \operatorname{Ker} (A - \lambda I)^2 =$

$$= \dim \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3$$

$\delta_3 = \dim \operatorname{Ker} (A - \lambda I)^3 =$

$$= \dim \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 4$$

1) Scegliamo una base $\{v_s^{(1)}\}_{s=1}^{\delta_1=2}$ per

$\ker(A-\lambda I)$.

Sia $v = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$

poniamo la condizione

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_2 + 4y_3 = 0 \\ y_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow y_2 = y_3 = 0$$

Scegliamo $v_1^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

2) Poiché $\delta_2 > \delta_1$ scegliamo una base $\{V_s^{(1)}\}_{s=1}^{\delta_1=2}$ di $\ker(A-\lambda I)$ tale che

$$(A-\lambda I)\, v_s^{(2)} = V_s^{(1)} \qquad s = 1 \dots \delta_2 - \delta_1$$

abbia $\delta_2 - \delta_1$ soluzioni linearmente indipendenti

Poiché $\delta_2 - \delta_1 = 1$ scegliamo

$$V_1^{(1)} = c_1 v_1^{(1)} + c_2 v_2^{(1)} = \begin{pmatrix} c_1 \\ 0 \\ 0 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

e cerchiamo $v_1^{(2)}$ risolvendo

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ 0 \\ 0 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_2 + 4y_3 = c_1 \\ y_3 = 0 \\ c_2 = 0 \end{cases} \qquad \Rightarrow \begin{cases} y_2 = c_1 \\ y_3 = 0 \\ c_2 = 0 \end{cases}$$

Scegliamo $c_1 = 1$ e abbiamo

$$V_1^{(1)} = v_1^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e quindi} \quad V_2^{(1)} = v_2^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$v_1^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Abbiamo quindi una base per $\ker(A-\lambda I)^2$

data da

$$\{v_j^{(2)}\}_{j=1}^{\delta_2=3} = \{V_j^{(1)}\}_{j=1}^{\delta_1=2} \cup \{v_j^{(2)}\}_{j=1}^{\delta_2-\delta_1=1} =$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

3) Poichè $\delta_3 > \delta_4$ scegliamo una base ~~per~~ $\{V_j^{(2)}\}_{j=1}^{\delta_2=3}$ per $\ker(A-\lambda I)^2$ con

$$V_j^{(2)} \in \operatorname{span}\{v_j^{(2)}\}_{j=1}^{\delta_2-\delta_1} \quad \text{per } j=1 \dots \delta_2-\delta_1$$

e tale che

$$(A-\lambda I)\, v_j^{(3)} = V_j^{(2)} \qquad j = 1 \dots \delta_3-\delta_2$$

abbia $\delta_3-\delta_2$ soluzioni linearmente indipendenti

Nel nostro caso $\delta_3-\delta_2 = 1$ quindi

$$V_1^{(2)} \in \operatorname{span}\{v_1^{(2)}\}$$

e possiamo scegliere $V_1^{(2)} = v_1^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Cerchiamo $v_1^{(3)}$ come soluzione di

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_2 + 4 y_3 = 0 \\ y_3 = 1 \end{cases} \qquad \Rightarrow \begin{cases} y_2 = -4 \\ y_3 = 1 \end{cases}$$

Quindi scegliamo $v_1^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

~~Abbiamo, per $s = 1 \dots \delta_2 - \delta_1$~~

Se per $s = 1 \dots \delta_2 - \delta_1$ $\quad V_s^{(2)} = \sum_{i=1}^{\delta_2 - \delta_1} c_i \, v_i^{(2)}$

poniamo $\bar{V}_s^{(1)} = \sum_{i=1}^{\delta_2 - \delta_1} c_i \, V_i^{(1)}$

e poniamo $\bar{V}_s^{(1)} = V_s^{(1)}$ per $s = (\delta_2 - \delta_1 + 1) \dots \delta_1$

Nel nostro caso $\delta_2 - \delta_1 = 1$, $\delta_1 = 2$

$V_1^{(2)} = 1 \cdot v_1^{(2)}$

Quindi $\bar{V}_1^{(1)} = 1 \cdot V_1^{(1)}$

$$\bar{V}_2 = V_2^{(1)}$$

Abbiamo una base per $\mathrm{Ker}\,(A-\lambda I)^3$

data che

$$\{v_j^{(3)}\}_{j=1}^{\delta_3=4} = \{\bar{V}_j^{(1)}\}_{j=1}^{\delta_1=2} \cup \{V_j^{(2)}\}_{j=1}^{\delta_2-\delta_1} \cup \{v_j^{(3)}\}_{j=1}^{\delta_3} =$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

4) Ci fermiamo perché $\delta_3 = 4 = n$

La base $\{v_j^{(3)}\}$ è la base rispetto cui

A è in forma canonica di Jordan

Per verificarlo scegliamo

$$P = [\bar{V}_1^{(1)}, V_1^{(2)}, v_1^{(3)}, \bar{V}_2^{(1)}] =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Quindi $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

e infine

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Che è la forma canonica di Jordan corrispondente ad A.

ESERCIZIO p 103, 1

CLASSIFICARE I PUNTI DI EQUILIBRIO [COME POZZO, SORGENTE O SELLA] DEL SISTEMA $\dot{x} = f(x)$

CON $f(x)$ DATA DA

(c) $f(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 - 2x_1 x_2 \\ 2x_2 - x_1^2 + x_2^2 \end{pmatrix}$

Punti di equilibrio:
dobbiamo risolvere il sistema

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_1 x_2 = 0 \\ 2x_2 - x_1^2 + x_2^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 (1 - x_2) = 0 \\ 2x_2 - x_1^2 + x_2^2 = 0 \end{cases}$$

Abbiamo:

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ 2x_2 + x_2^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2(2 + x_2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = \begin{cases} 0 \\ -2 \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = 1 \\ -x_1^2 + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 1 \\ x_1^2 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 1 \\ x_1 = \begin{cases} -\sqrt{3} \\ +\sqrt{3} \end{cases} \end{cases}$$

I punti di equilibrio sono

$$A = \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \qquad B = \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -2 \end{cases} \qquad C = \begin{cases} x_1 = \sqrt{3} \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

$$D = \begin{cases} x_1 = -\sqrt{3} \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

Calcoliamo ora

$$Df(x) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} \\[2ex] \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2x_2 & -2x_1 \\ -2x_1 & 2+2x_2 \end{pmatrix}$$

$$Df(x)\Big|_{x=A} = Df(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Autovalori $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$

$$Df(x)\Big|_{x=B} = Df(0,-2) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Autovalori $\lambda_1 = 6$, $\lambda_2 = -2$

$$Df(x)\Big|_{x=C} \Rightarrow Df(\sqrt{3},1) = \begin{pmatrix} 0 & -2\sqrt{3} \\ -2\sqrt{3} & 4 \end{pmatrix}$$

Autovalori: $-\lambda(4-\lambda) - 12 = 0$

$$\lambda^2 - 4\lambda + 12 = 0$$

$$\lambda = \frac{4 \pm \sqrt{16+48}}{2} = \frac{4\pm 8}{2} \begin{array}{l} \nearrow 6 \\ \searrow -2 \end{array}$$

$$Df(x)\Big|_{x=D} \Rightarrow Df(-\sqrt{3},1) = \begin{pmatrix} 0 & 2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & 4 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 6, \quad \lambda_2 = -2$$

$A = (0,0)$ nodo instabile per il lineare associato e sorgente per il non lineare

$B = (0,-2)$ è un p.to di sella sia per il lineare associato che per il non lineare

$C = (\sqrt{3},1)$

$D = (-\sqrt{3},1)$ sono p.ti di sella per il lineare associato e per il non lineare.

ESERCIZIO p. 134 n 5 (A)

USARE UN' APPROPIATA FUNZIONE DI LIAPUNOV PER DETERMINARE LA STABILITA' DEI P.TI DI EQUILIBRIO DEL SISTEMA

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_2 + x_1 x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2 - x_1^2 - x_2^3 \end{cases}$$

punti di equilibrio

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_1 x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_1^2 - x_2^3 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{x_2}{1 - x_2} \\ \dfrac{x_2}{1 - x_2} - x_2 - \dfrac{x_2^2}{(1-x_2)^2} - x_2^3 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{x_2}{1 - x_2} \\ x_2^3 \left(-2 + 2x_2 - x_2^2\right) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$ $\Rightarrow$ l'origine è l'unico punto di equilibrio

Consideriamo

$$Df(x) = \begin{pmatrix} -1 + x_2 & 1 + x_1 \\ 1 - 2x_1 & -1 - 3x_2^2 \end{pmatrix}$$

$$Df(0,0) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Autovalori : $(1+\lambda)^2 - 1 = 0$

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 - 1 = 0$$

$$\lambda(\lambda + 2) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 0 \quad , \lambda_2 = -2$$

Il p.to non è iperbolico quindi non è possibile classificarlo attraverso lo studio del linearizzato

Usiamo il metodo della funzione di Liapunov

Sia $V(x) = a x_1^2 + b x_2^2$

$$\dot V(x) = 2a x_1 \dot x_1 + 2b x_2 \dot x_2 =$$

$$= -2a x_1^2 + 2a x_1 x_2 + 2a x_1^2 x_2 +$$

$$+ 2b x_1 x_2 - 2b x_2^2 - 2b x_1^2 x_2 - 2b x_2^4$$

Se prendiamo $a = b = 1$ otteniamo

$$V(x) = x_1^2 + x_2^2$$

V è continua, $V(0,0) = 0$, e

$V(x) > 0 \quad \forall\ x \neq 0$

Quindi $V(x)$ è una funzione di Liapunov relativa al p.to di equilibrio x_0

Inoltre

$$\dot V(x) = -2 x_1^2 + 2 x_1 x_2 + \cancel{2 x_1^2 x_2} +$$

$$+ 2 x_1 x_2 - 2 x_2^2 - \cancel{2 x_1^2 x_2} - 2 x_2^4 =$$

$$= -2 (x_1^2 - 2 x_1 x_2 + x_2^2) - 2 x_2^4 =$$

$$= -2 (x_1 + x_2)^2 - 2 x_2^4$$

Quindi $\dot V(x) < 0 \quad \forall\ x \neq (0,0)$

$\Rightarrow$ l'origine è un p.to di equilibrio assolutamente stabile.

ESERCIZIO p 145 n 4 (f)

DETERMINARE LA NATURA DEI PUNTI CRITICI DEL SEGUENTE SISTEMA

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 - y^2 - 1 \\ \dot{y} = 2y \end{cases}$$

i punti critici risolvono

$$\begin{cases} x^2 - y^2 - 1 = 0 \\ 2y = 0 \end{cases}$$

sono quindi

$$A: \begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \end{cases} \qquad B: \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

Calcoliamo

$$Df(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$Df(-1,0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

A è un punto di sella per il lineare associato e quindi lo è anche per il non lineare.

$$Df(1,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

B è un nodo instabile per il lineare associato e quindi lo è anche per il non lineare.