Ad esempio, si ha $\int_0^a e^x \mathrm{d}x = [e^x]_0^a = e^a - 1$, risultato che abbiamo già ottenuto con metodo diretto nel paragrafo 50.

Una tabella di derivate fornisce immediatamente una tabella di primitive, e quindi di integrali indefiniti. Ad esempio, riesaminando la conclusione del paragrafo 43, otteniamo:

$$\int x^r \mathrm{d}x = \frac{1}{r+1} x^{r+1} + k \quad (\text{se è } r \neq -1), \qquad \int \cos x \,\mathrm{d}x = \sin x + k,$$

$$\int \frac{1}{x} \mathrm{d}x = \log|x| + k, \qquad \int \sin x \,\mathrm{d}x = -\cos x + k,$$

$$\int e^x \mathrm{d}x = e^x + k, \qquad \int \frac{1}{1+x^2} \mathrm{d}x = \operatorname{arctg} x + k,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x = \arcsin x + k, \qquad \int \frac{1}{\cos^2 x} \mathrm{d}x = \operatorname{tg} x + k.$$

52.5 *Osservazione.* Il calcolo di un integrale definito per mezzo di una primitiva fornisce un esempio significativo di problema che viene risolto mediante il passaggio ad un problema più generale. (Infatti, conoscere una primitiva equivale a conoscere l'integrale definito esteso ad un *qualsiasi* intervallo.) In molti casi, la determinazione esplicita della primitiva è impossibile; si conoscono però procedimenti ingegnosi (in cui ora non possiamo addentrarci) che consentono in certi casi la valutazione esatta di un integrale definito senza ricorrere alla primitiva.

53. Regole di integrazione

Le regole di derivazione (vedi § 43) possono servire per la ricerca di primitive e quindi per il calcolo di integrali definiti e indefiniti.

Nel corso di questo paragrafo, le lettere F, G, ... stanno ad indicare una qualunque primitiva della funzione continua f, g, ... (rispettivamente).

1) *Integrazione per parti.*

Consideriamo l'identità:

$$\mathrm{D}\big(F(t)G(t)\big) = F'(t)G(t) + F(t)G'(t) = f(t)G(t) + F(t)g(t).$$

Integrando in un intervallo $[a, b]$ si ottiene:

$$[F(t)G(t)]_a^b = \int_a^b f(t)G(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b F(t)g(t)\,\mathrm{d}t,$$

da cui:

$$\int_a^b F(t)g(t)\,\mathrm{d}t = [F(t)G(t)]_a^b - \int_a^b f(t)G(t)\,\mathrm{d}t. \qquad [53.1]$$

Sostituendo in luogo di b la variabile x si ricava la seguente relazione fra gli integrali indefiniti:

$$\int F(x)g(x)\,\mathrm{d}x = F(x)G(x) - \int f(x)G(x)\,\mathrm{d}x. \qquad [53.2]$$

(Trattandosi di una relazione tra integrali indefiniti, il termine costante è stato omesso.)

In termini classici questa si legge così: l'integrale indefinito del prodotto del "fattore finito" $(F(x))$ per il "fattore differenziale" $(g(x)\mathrm{d}x)$ è uguale al prodotto dei fattori finiti (cioè $F(x)G(x)$) diminuito dell'integrale del prodotto dell' "integrale del fattore differenziale" (cioè $G(x)$) per il "differenziale del fattore finito" $(f(x)\mathrm{d}x)$.

Ecco come la [53.2] può essere utilizzata per il calcolo di un integrale indefinito:

$$\int x \log x \,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}\log x - \int \frac{x^2}{2}\frac{1}{x}\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}\log x - \frac{x^2}{4} + k.$$

2) *Integrazione per sostituzione.*

Sia f una funzione continua definita in un intervallo $[a, b]$ e sia φ una funzione definita in un intervallo $[\alpha, \beta]$, continua e derivabile con continuità, a valori in $[a, b]$.

Posto $F(x) = \int_a^x f(\xi)\mathrm{d}\xi$, consideriamo la funzione composta $F \circ \varphi$. Si ha:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(F\circ\varphi)(t) = F'\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t) = f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t).$$

Poiché $f \circ \varphi$ e φ' sono continue, applicando il teorema fondamentale 52.3, otteniamo:

$$(F\circ\varphi)(t)=\int_{\alpha}^{t} f(\varphi(\eta))\,\varphi'(\eta)\,\mathrm{d}\eta+k \qquad (\alpha<t<\beta)\,,$$

relazione che si può anche scrivere:

$$\int_{a}^{\varphi(t)} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi=\int_{\alpha}^{t} f(\varphi(\eta))\,\varphi'(\eta)\,\mathrm{d}\eta+k\,.$$

Dando a t un particolare valore t_0 e sottraendo membro a membro la relazione così ottenuta, si ricava anche:

$$\int_{\varphi(t_0)}^{\varphi(t)} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi=\int_{t_0}^{t} f(\varphi(\eta))\,\varphi'(\eta)\,\mathrm{d}\eta\,. \qquad [53.3]$$

Mediante questa formula si può calcolare l'integrale definito $\int_c^d f(\xi)\mathrm{d}\xi$ se c e d appartengono all'immagine della φ.

Infatti, se $\varphi(\gamma)=c$, $\varphi(\delta)=d$; si ha

$$\int_{c}^{d} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi=\int_{\gamma}^{\delta} f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t\,. \qquad [53.4]$$

Se φ non è invertibile, può accadere che vi sia più di una coppia di punti (γ,δ) utilizzabile. Se in $[\alpha,\beta]$ si ha $\varphi'(t)\neq 0$, allora $\varphi(t)$ ammette inversa e si ha:

$$\int_{c}^{d} f(x)\,\mathrm{d}x=\int_{\varphi^{-1}(c)}^{\varphi^{-1}(d)} f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t\,. \qquad [53.5]$$

Le formule di integrazione per sostituzione ci mostrano quanto sia utile la classica notazione con cui si indica l'integrale; infatti, posto $x=\varphi(t)$, il nuovo integrale si ottiene sostituendo a $\mathrm{d}x$ la sua espressione nella nuova variabile: $\mathrm{d}x=\varphi'(t)\mathrm{d}t$.

Ad esempio, si calcoli l'integrale indefinito:

$$\int\frac{e^x}{1+e^x}\,\mathrm{d}x\,.$$

Poniamo $1+e^x=t$, da cui $x=\log(t-1)$. Otteniamo

$$\int\frac{e^x}{1+e^x}\,\mathrm{d}x=\int\frac{t-1}{t}\,\frac{1}{t-1}\,\mathrm{d}t=\int\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t=\log|t|+k=\log(1+e^x)+k\,.$$

Esercizi

1. Calcolare i seguenti integrali indefiniti:

$$\int x^2e^x\mathrm{d}x\,,\qquad \int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}+1}\,,\qquad \int\operatorname{arctg}x\,\mathrm{d}x\,,\qquad \int(\operatorname{tg}x)^2\mathrm{d}x\,,$$

$$\int e^{ax}\cos bx\,\mathrm{d}x\,,\qquad \int e^{ax}\sin bx\,\mathrm{d}x, \qquad (a \text{ e } b \text{ numeri reali}).$$

2. Si dimostri la seguente formula (formula di Taylor con resto integrale) valida per le funzioni dotate di derivate continue fino all'ordine n in un certo intervallo:

$$f(x)=f(x_0)+\frac{1}{1!}f'(x_0)(x-x_0)^2+\ldots+\frac{1}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x_0)(x-x_0)^{n-1}+$$
$$+\frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^{n-1}f^{(n)}(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Questa formula richiede un leggero rafforzamento di ipotesi rispetto a quella con il resto di Lagrange, ma ha il vantaggio di potersi applicare tale quale alle funzioni a valori vettoriali, a cui può estendersi (come vedremo in seguito) la teoria dell'integrazione, a cui invece non possono estendersi (come abbiamo visto, § 49) i teoremi di Lagrange, Cauchy ecc.

Per la dimostrazione, applicare ripetutamente la formula:

$$\frac{1}{k!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^k f^{(k+1)}(t)\,\mathrm{d}t=-\frac{1}{k!}(x-x_0)^k f^{(k)}(x_0)+\frac{1}{(k-1)!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^{k-1}f^{(k)}(t)\,\mathrm{d}t,$$

che si ottiene facilmente con una integrazione per parti.

3. Dalla relazione $\log x=\int_1^x(1/t)\,\mathrm{d}t$ $(x>0)$ si deduca (mediante un'opportuna sostituzione) l'identità: $\log(ab)=\log a+\log b$.

54. Integrazione delle funzioni razionali

Nelle pagine precedenti (§ 52) il problema della ricerca della primitiva è stato risolto nell'ambito delle funzioni continue: si è visto che, assegnata una funzione f continua in un intervallo, esiste una funzione F derivabile (e perciò continua) tale che $DF = f$.

Conviene ora restringere questo problema: presa una classe $\mathscr{A}$ di funzioni continue e una classe $\mathscr{B}$ di funzioni dotate di derivata continua, possiamo chiederci se ogni funzione di $\mathscr{A}$ ha una primitiva in $\mathscr{B}$. Naturalmente $\mathscr{B}$ potrà essere una classe di funzioni che ammettono una particolare rappresentazione analitica; ad esempio, potrà essere interessante vedere se, pur di prendere $\mathscr{A}$ opportunamente, si può assumere per $\mathscr{B}$ la classe di quelle che abbiamo chiamato funzioni elementari (vedi osservazione 43.10). Una funzione che ha una primitiva in questa classe si dirà integrabile elementarmente.

In questo paragrafo dimostreremo il seguente importante risultato:

54.1 TEOREMA *Ogni funzione reale razionale è integrabile mediante una combinazione lineare di funzioni razionali e di funzioni del tipo:* $\log(ax^2 + bx + c)$, $\operatorname{arctg}(ax^2 + bx + c)$.

(C'è appena bisogno di osservare che per ogni funzione razionale $A(x)/B(x)$ il problema dell'integrazione si pone in ciascun intervallo in cui il denominatore $B(x)$ non si annulla.)

Cominciamo con l'integrazione dei seguenti tipi fondamentali di funzioni razionali:

$$\frac{1}{x^n}, \quad \frac{x}{(1+x^2)^n}, \quad \frac{1}{(1+x^2)^n} \qquad (n \text{ intero} > 0). \qquad [54.1]$$

L'integrale della prima funzione si ottiene immediatamente:

$$\int \frac{1}{x^n}\,dx = \begin{cases} -\dfrac{1}{(n-1)x^{n-1}} + k & \text{per} \quad n > 1 \\ \log|x| + k & \text{per} \quad n = 1\,. \end{cases} \qquad [54.2]$$

Anche l'integrale della seconda delle [54.1] si ottiene facilmente: basta porre $y = x^2 + 1$. Risulta:

$$\int \frac{x}{(1+x^2)^n}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{dy}{y^n} =$$

$$= \begin{cases} -\dfrac{1}{2(n-1)(1+x^2)^{n-1}} & \text{se è} \quad n > 1 \\ \dfrac{1}{2}\log(1+x^2) & \text{se è} \quad n = 1\,. \end{cases} \qquad [54.3]$$

Passiamo al terzo integrale. Per $n = 1$, si ha, come sappiamo:

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arctg} x + k\,. \qquad [54.4]$$

Per $n > 1$, seguiremo un procedimento ricorrente. Posto:

$$I_n = \int \frac{dx}{(1+x^2)^n},$$

consideriamo l'identità:

$$\frac{1}{(1+x^2)^n} = \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}} - \frac{x^2}{(1+x^2)^n}.$$

Integrando questa membro a membro, otteniamo:

$$I_n = I_{n-1} - \int \frac{x^2}{(1+x^2)^n}\,dx\,.$$

Applichiamo ora a quest'ultimo integrale la regola d'integrazione per parti, assumendo x come "fattore finito" e $x/(1+x^2)^n$ come "fattore differenziale". Si ricava così:

$$I_n = I_{n-1} + \frac{x}{2(n-1)(1+x^2)^{n-1}} - \frac{1}{2(n-1)}\int \frac{dx}{(1+x^2)^{n-1}},$$

da cui

$$I_n = \frac{x}{2(n-1)(1+x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} I_{n-1}\,. \qquad [54.5]$$

Questa è la formula ricorrente cercata: mediante essa il calcolo di I_n è ricondotto a quello di I_1.

Vediamo ora come si deve operare quando sia assegnata una funzione razionale qualsiasi

$$\frac{A(x)}{B(x)}. \qquad [54.6]$$

Qui $A(x)$ e $B(x)$ sono polinomi reali, che possiamo ovviamente supporre primi fra loro. Dato un polinomio $P(x)$, indicheremo in seguito con $\operatorname{gr}(P(x))$ il suo grado.

Possiamo metterci nell'ipotesi che la funzione razionale [54.6] sia *propria*: con questo intendiamo dire che è $\operatorname{gr}(A(x)) < \operatorname{gr}(B(x))$. Infatti, in caso contrario, dividendo $A(x)$ per $B(x)$, otteniamo l'identità:

$$A(x) = B(x)Q(x) + R(x)$$

in cui è $\operatorname{gr}(R(x)) < \operatorname{gr}(B(x))$. Da questa si ricava subito:

$$\frac{A(x)}{B(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{B(x)}.$$

Poiché l'integrale del polinomio $Q(x)$ si esprime mediante un polinomio, ci siamo effettivamente ridotti al problema dell'integrazione di una funzione razionale propria. Dunque, è lecito supporre che la [54.6] sia propria.

Ci proponiamo di decomporre la funzione razionale assegnata in funzioni razionali di tipo particolare.

54.2 LEMMA *Data la funzione razionale propria $A(x)/B(x)$ (con $A(x)$ e $B(x)$ primi fra loro), se α è radice di $B(x)$ di molteplicità μ, risultano univocamente determinati una costante a ed una funzione razionale propria $A_1(x)/B_1(x)$, con $\operatorname{gr}(B_1(x)) < \operatorname{gr}(B(x))$, tali che valga l'identità:*

$$\frac{A(x)}{B(x)} = \frac{a}{(x-a)^\mu} + \frac{A_1(x)}{B_1(x)}. \tag{54.7}$$

Dimostrazione. Per ipotesi, si potrà scrivere $B(x) = (x-\alpha)^\mu \tilde{B}(x)$, dove $\tilde{B}(x)$ è un polinomio che non è divisibile per $x-\alpha$.

Si ha

$$\frac{A(x)}{B(x)} - \frac{a}{(x-\alpha)^\mu} = \frac{A(x) - a\tilde{B}(x)}{(x-\alpha)^\mu \tilde{B}(x)}.$$

Si noti che, essendo $\operatorname{gr}(\tilde{B}(x)) < \operatorname{gr}(B(x))$, si ha $\operatorname{gr}(A(x) - a\tilde{B}(x)) < \operatorname{gr}(B(x))$. Cerchiamo ora di fissare a in modo tale che la funzione razionale a secondo membro abbia le proprietà richieste per $A_1(x)/B_1(x)$. Per abbassare il grado del denominatore, occorre che numeratore e denominatore abbiano una radice comune: ma le radici di $\tilde{B}(x)$ non possono essere radici di $A(x) - a\tilde{B}(x)$ perché $A(x)$ e $\tilde{B}(x)$ non hanno radici comuni. L'unica radice comune può essere α: basta prendere a tale che $A(\alpha) - a\tilde{B}(\alpha) = 0$, ciò che è possibile in modo unico, essendo $\tilde{B}(\alpha) \neq 0$.

Con questa scelta di a si ha dunque:

$$\frac{A(x) - a\tilde{B}(x)}{(x-\alpha)^\mu \tilde{B}(x)} = \frac{A_1(x)}{B_1(x)},$$

dove è $\operatorname{gr}(A_1(x)) < \operatorname{gr}(B_1(x)) < \operatorname{gr}(B(x))$. È chiaro poi che si ha $B_1(x) = (x-\alpha)^\nu \tilde{B}(x)$, essendo $\nu < \mu$. In tal modo vale la [54.7] e sono soddisfatte tutte le condizioni volute dall'enunciato. ∎

Supponiamo ora che, nella [54.6], il denominatore $B(x)$ abbia tutte le sue radici reali. Allora, applicando il lemma dimostrato, si può decomporre la [54.6] in funzioni razionali del tipo $1/(x-\alpha)^n$. Ponendo $x - \alpha = y$, l'integrale si riduce al primo dei tipi [54.3] che abbiamo considerato.

In pratica, anziché ricorrere a successive applicazioni del lemma dimostrato, converrà fare ricorso al cosidetto *metodo dei coefficienti indeterminati*, che illustriamo con il seguente esempio:

Esempio. Si voglia integrare la funzione $1/x^2(x-1)$. Il lemma dimostrato ci assicura che vale l'identità:

$$\frac{1}{x^2(x-1)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2},$$

e che i coefficienti a, b, c sono univocamente determinati. Moltiplicando membro a membro per $x^2(x-1)$ otteniamo l'identità:

$$(a+b)x^2 - (b-c)x - c - 1 = 0.$$

Il principio di identità dei polinomi ci dà allora il sistema: $a+b=0$, $b-c=0$, $c+1=0$, da cui si ricava subito $c=-1$, $b=-1$, $a=1$. Si ha allora:

$$\int \frac{dx}{x^2(x-1)} = \int \frac{dx}{x-1} - \int \frac{dx}{x} - \int \frac{dx}{x^2} = \log|x-1| - \log|x| + \frac{1}{x} + c.$$

Osserviamo che il procedimento ora introdotto per decomporre una funzione razionale vale anche quando le radici del denominatore siano complesse (e vale anche per funzioni razionali complesse). Ma la teoria della integrazione che abbiamo sviluppato (almeno fino a questo punto) riguarda solo le funzioni reali. Occorre dunque cercare una decomposizione che ci faccia rimanere nell'ambito delle funzioni reali.

Supponiamo dunque che nella [54.6], il denominatore $B(x)$ abbia radici complesse. Occorre tener presente che, se $\alpha + i\beta$ è una radice multipla di ordine μ, essendo $B(x)$ reale, anche $\alpha - i\beta$

è radice di $B(x)$, con la stessa molteplicità μ, e $B(x)$ è divisibile per il polinomio di grado 2μ:

$$(x-\alpha-i\beta)^\mu(x-\alpha+i\beta)^\mu=\big((x-\alpha)^2+\beta^2\big)^\mu.$$

In questa situazione, vale una proposizione analoga al lemma 54.2, anche se un po' più complicata.

54.3 LEMMA *Data la funzione razionale propria (reale) $A(x)/B(x)$ con $A(x)$ e $B(x)$ polinomi primi fra loro, se $\alpha+i\beta$ (con $\beta\neq 0$) è una radice di $B(x)$ di molteplicità μ, risultano univocamente determinate: due costanti reali b, c e una funzione razionale propria $A_1(x)/B_1(x)$, con $\operatorname{gr}(B_1(x))\leqslant\operatorname{gr}(B(x))-2$, tali che valga l'identità:*

$$\frac{A(x)}{B(x)}=\frac{bx+c}{\big((x-\alpha)^2+\beta^2\big)^\mu}+\frac{A_1(x)}{B_1(x)}.$$

Dimostrazione. Procedendo come nella dimostrazione del lemma 54.2, si pone $B(x)=\big((x-\alpha)^2+\beta^2\big)^\mu\tilde{B}(x)$; per ipotesi risulterà $\tilde{B}(\alpha+i\beta)\neq 0$, $\tilde{B}(\alpha-i\beta)\neq 0$. Si cerca di determinare b e c in modo che la funzione razionale

$$\frac{A(x)}{B(x)}-\frac{bx+c}{\big((x-\alpha)^2+\beta^2\big)^\mu}=\frac{A(x)-(bx+c)\tilde{B}(x)}{\big((x-\alpha)^2+\beta^2\big)^\mu\tilde{B}(x)} \qquad [54.8]$$

abbia le proprietà che l'enunciato prescrive per $A_1(x)/B_1(x)$. L'unico modo per ottenere ciò sta nell'imporre che il polinomio $A(x)-(bx+c)\tilde{B}(x)$ (il quale, notiamo, ha grado minore del grado di $B(x)$) abbia come radici $\alpha+i\beta$ ed $\alpha-i\beta$: così esso risulterà divisibile per $(x-\alpha)^2+\beta^2$.

Si ottiene così il sistema:

$$A(\alpha+i\beta)-\big(b(\alpha+i\beta)+c\big)\tilde{B}(\alpha+i\beta)=0,$$
$$A(\alpha-i\beta)-\big(b(\alpha-i\beta)+c\big)\tilde{B}(\alpha-i\beta)=0.$$

Questo sistema è equivalente al seguente:

$$b(\alpha+i\beta)+c=\frac{A(\alpha+i\beta)}{\tilde{B}(\alpha+i\beta)},\qquad b(\alpha-i\beta)+c=\frac{A(\alpha-i\beta)}{\tilde{B}(\alpha-i\beta)}. \qquad [54.9]$$

Sottraendo membro a membro, si ha

$$2ib\beta=\frac{A(\alpha+i\beta)}{\tilde{B}(\alpha+i\beta)}-\frac{A(\alpha-i\beta)}{\tilde{B}(\alpha-i\beta)}.$$

Il secondo membro, che è differenza di due numeri fra loro coniugati, è immaginario puro; perciò l'equazione, essendo $\beta\neq 0$, ha un'unica soluzione b reale. Sommando le [54.9] membro a membro si trova un unico c, reale, tale che la coppia b, c è soluzione del sistema. Presi questi valori per b e c, si vede che nella [54.8], a secondo membro, numeratore e denominatore hanno un fattore del tipo $\big((x-\alpha)^2+\beta^2\big)^\mu$ (con $\mu\geqslant 1$) in comune. Semplificando, si verifica la situazione voluta dall'enunciato. ∎

Il lemma dimostrato permette di completare la decomposizione della nostra funzione razionale. In corrispondenza ad ogni radice complessa $\alpha+i\beta$ ($\beta\neq 0$) di molteplicità μ si potrà estrarre un addendo del tipo

$$\frac{bx+c}{\big((x-\alpha)^2+\beta^2\big)^\mu}.$$

Si tratta ora di vedere come l'integrale di questo si possa ridurre al secondo e al terzo dei [54.1]. Ponendo $(x-\alpha)=\beta y$, cioè $x=\alpha+\beta y$, si ha:

$$\int\frac{bx+c}{\big((x-\alpha)^2+\beta^2\big)^\mu}\,dx=\frac{b}{\beta^{2(\mu-1)}}\int\frac{y}{(1+y^2)^\mu}\,dy+\frac{b\alpha+c}{\beta^{2\mu-1}}\int\frac{dy}{(1+y^2)^\mu}.$$

Questi sono integrali della forma [54.1] (secondo e terzo tipo).

Tenendo presenti tutti i risultati parziali fin qui ottenuti, si costata che il teorema 54.1 è completamente dimostrato. ∎

Esempio. Sia:

$$I=\int\frac{2x^2-1}{x^3-2x^2+x-2}\,dx.$$

Le radici del denominatore sono 2 e $\pm i$. Si porrà allora:

$$\frac{2x^2-1}{x^3-2x^2+x-2}=\frac{a}{x-2}+\frac{bx+c}{x^2+1}.$$

Si ricava facilmente $a=\frac{7}{5}$, $b=\frac{3}{5}$, $c=\frac{6}{5}$ e si deduce:

$$I=\tfrac{3}{10}\log(x^2+1)+\tfrac{6}{5}\operatorname{arctg}x+\tfrac{7}{5}\log|x-2|+k \qquad (k \text{ costante}).$$

Esercizi

1. Calcolare i seguenti integrali:

$$I_1=\int\frac{dx}{x(1-x^2)},\qquad I_2=\int\frac{dx}{1-x^4},\qquad I_3=\int\frac{(x^2+1)dx}{x^3-4x^2+5x-2}.$$

Si troverà:

$$I_1 = \log|x| - \frac{1}{2}\log|1-x^2| + c,$$

$$I_2 = \frac{1}{4}\log|1+x| - \frac{1}{4}\log|1-x| + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + c,$$

$$I_3 = \frac{2}{x-1} - 4\log|x-1| + 5\log|x-2| + c.$$

2. Partendo dai lemmi 54.2 e 54.3, si dimostri la seguente formula di decomposizione valida per la funzione razionale propria $A(x)/B(x)$:

$$\frac{A(x)}{B(x)} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\tilde{A}(x)}{\tilde{B}(x)}\right) + \frac{A^*(x)}{B^*(x)},$$

dove $\tilde{A}(x)/\tilde{B}(x)$ e $A^*(x)/B^*(x)$ sono funzioni razionali proprie, il polinomio $B^*(x)$ ha tutte e sole le radici di $B(x)$, ma con molteplicità 1, il polinomio $\tilde{B}(x)$ ha come radici tutte e sole le radici multiple di $B(x)$, ciascuna con molteplicità diminuita di un'unità. Questa decomposizione (di Hermite), nel caso in cui il denominatore abbia radici multiple, è utile nell'integrazione perché mette in evidenza la parte razionale dell'integrale e comporta calcoli più semplici di quelli che risultano applicando direttamente il metodo considerato nel testo.

55. Altre classi di funzioni integrabili elementarmente

Vi sono altre classi di funzioni che si possono integrare nell'ambito delle funzioni elementari. I procedimenti che ora esponiamo a riguardo consistono tutti nell'effettuare una sostituzione che renda razionale la funzione integranda.

1) Consideriamo l'integrale:

$$\int f(x, \sqrt[m]{P(x)})\,dx, \qquad [55.1]$$

dove f è una funzione razionale di due variabili e $P(x)$ è un polinomio di primo grado: $P(x) = ax + b$, $(a \neq 0)$.

Basterà porre $P(x) = t^m$, cioè $x = (t^m - b)/a$; l'integrale si trasforma nell'integrale:

$$\frac{m}{a}\int f\left(\frac{t^m - b}{a}, t\right) t^{m-1}\,dt,$$

che si può calcolare col metodo introdotto nel paragrafo precedente.

Esempio. Sia $I = \int[\sqrt{x}/(\sqrt{x}+1)]\,dx$. Ponendo $x = t^2$ si ha

$$I = \int \frac{t}{t+1}2t\,dt = \int\left\{2t - 2 + \frac{2}{t+1}\right\}dt =$$
$$= t^2 - 2t + 2\log|t+1| + c = x - 2\sqrt{x} + 2\log(\sqrt{x}+1) + c.$$

55.1 *Osservazione.* Con lo stesso metodo si può calcolare un integrale della forma [55.1], dove, sempre risultando f razionale, si abbia

$$P(x) = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta} \qquad (\text{con } \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0);$$

basta notare che anche in questo caso $P(x)$ ha una funzione inversa razionale.

2) Più in generale, possiamo considerare integrali del tipo:

$$\int f(x, y(x))\,dx, \qquad [55.2]$$

dove f è una funzione razionale di due variabili e y è una funzione continua in un certo intervallo e tale che si abbia:

$$g(x, y(x)) = 0, \qquad [55.3]$$

essendo g un polinomio non nullo in due variabili. Si dice, in questo caso, che la curva $y = y(x)$ è un *ramo* della curva algebrica:

$$g(x, y) = 0, \qquad [55.4]$$

e che l'integrale [55.2] è un *integrale abeliano*[1] *appartenente* alla curva algebrica [55.4].

Ad esempio, rientra in questo tipo l'integrale

$$\int \frac{x}{x + \sqrt{x - x^2}}\,dx;$$

si può infatti porre, con i simboli introdotti, $f(x, y) = x/(x+y)$, $y(x) = \sqrt{x - x^2}$, e si ha $g(x, y) = x^2 + y^2 - x$.

[1] Dal nome del matematico norvegese Niels Henrik Abel (1802-28).

Il caso per noi interessante è quello in cui la curva algebrica [55.4] sia rappresentabile parametricamente con funzioni razionali, cioè si possa porre:

$$x=\varphi(t), \qquad y=\psi(t),$$

essendo $\varphi(t)$ e $\psi(t)$ funzioni razionali. L'integrale [55.2] si trasforma allora nel seguente:

$$\int f(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t)\,dt,$$

dove è chiaro che la funzione integranda è razionale.

Un caso particolarmente importante è quello in cui la curva [55.4] sia una conica. Allora la rappresentazione parametrica si ottiene facilmente in questo modo: preso un punto O della conica, consideriamo il fascio delle rette che hanno centro in O. Ciascuna di queste rette taglia la conica in O e in un ulteriore punto P: verifichiamo che le coordinate di questo punto sono esprimibili razionalmente in funzione del parametro angolare della retta (fig. 55.1).

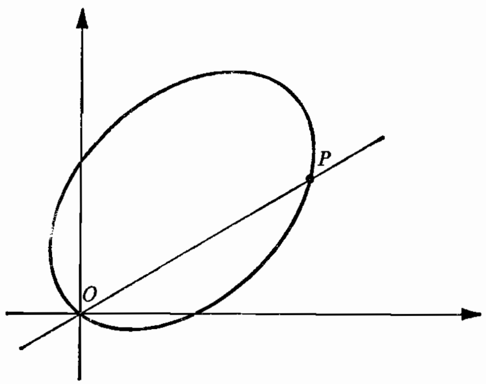

Figura 55.1

Per semplicità di calcolo, supponiamo che il punto O coincida con l'origine di R^2 (una traslazione ci permette di ridurci sempre a questo caso, senza alterare la sostanza del nostro problema). L'equazione della conica si può scrivere:

$$ax^2+2bxy+cy^2+dx+ey=0.$$

L'equazione del fascio di rette per l'origine è $y = tx$. Sostituendo, si ricava facilmente l'equazione parametrica:

$$\begin{cases} x=-\dfrac{d+et}{a+2bt+ct^2}, \\ y=-\dfrac{dt+et^2}{a+2bt+ct^2}. \end{cases}$$

Dunque, gli integrali abeliani appartenenti alle coniche sono tutti razionalizzabili, e perciò calcolabili elementarmente.

Esempio. Riprendiamo l'integrale

$$I=\int \frac{x}{x+\sqrt{x-x^2}}\,dx$$

che è un integrale abeliano appartenente al cerchio $x^2+y^2-x=0$. Possiamo osservare che il ramo che ci interessa: $g(x)=\sqrt{x-x^2}$ è quello rappresentato dalla semicirconferenza che sta nel semipiano $y \geqslant 0$.

Ponendo $y = tx$, otteniamo

$$x=\frac{1}{1+t^2}, \qquad y=\frac{t}{1+t^2}=\sqrt{x-x^2}.$$

(Osserviamo che, a motivo del segno di y, deve essere $0 \leqslant t < +\infty$.) Sostituendo, si ottiene:

$$I=\int \frac{-2t}{(1+t)(1+t^2)}\,dt.$$

Decomponendo la funzione razionale integranda, si ha

$$\frac{-2t}{(1+t)(1+t^2)}=\frac{1}{1+t}-\frac{1+t}{1+t^2}$$

da cui:

$$I=\log(1+t)-\frac{1}{2}\log(1+t^2)-\operatorname{arctg} t+k.$$

Tenendo presente che si ha $t=\sqrt{(1-x)/x}$ e semplificando, si ottiene finalmente

$$I=\log(\sqrt{x}+\sqrt{1-x})-\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x-1}{x}}+k.$$

55.2 *Osservazione.* Nel caso che la conica sia un'iperbole, la parametrizzazione può essere ottenuta con un fascio di rette parallele a uno degli asintoti (nel piano proiettivo, ciascuna di queste rette ha in comune con la conica un punto all'infinito).

Applichiamo questa osservazione al calcolo del seguente importante integrale:

$$\int \sqrt{x^2-1}\,\mathrm{d}x\,.$$

Posto $y=\sqrt{x^2-1}$, si vede che l'integrale appartiene all'iperbole $x^2-y^2=1$. Poniamo $y=x-t$: al variare del parametro t, si ottiene un fascio di rette parallele all'asintoto $y=x$. Si ha dunque $y^2=(x-t)^2=x^2-2xt+t^2$, perciò $x^2-(x^2-2xt+t^2)=1$, da cui $2xt-t^2=1$ e, infine,

$$x=\frac{1+t^2}{2t}\,,\qquad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{2}\,\frac{t^2-1}{t^2}\,.$$

Si ottiene allora:

$$\int\sqrt{x^2-1}\,\mathrm{d}x=\int(x-t)\,\frac{t^2-1}{2t^2}\,\mathrm{d}t=\int\left(\frac{1+t^2}{2t}-t\right)\frac{t^2-1}{2t^2}\,\mathrm{d}t=$$
$$=-\frac{1}{4}\int\frac{(t^2-1)^2}{t^3}\,\mathrm{d}t=-\frac{1}{4}\int\left(t-\frac{2}{t}+\frac{1}{t^3}\right)\mathrm{d}t=$$
$$=-\frac{1}{4}\left(\frac{t^2}{2}-2\log|t|-\frac{1}{2}\,\frac{1}{t^2}\right)+k\,.$$

Notando che si ha $t=x-\sqrt{x^2-1}$, $1/t=x+\sqrt{x^2-1}$, sostituendo e semplificando, si ottiene:

$$\int\sqrt{x^2-1}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\,x\sqrt{x^2-1}+\frac{1}{2}\log\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)+k\,.$$

Sia (x,y) un punto dell'iperbole $x^2-y^2=1$, con $x\geqslant 1$, $y\geqslant 0$. Diremo *settore iperbolico* individuato dal punto (x,y) la regione (tratteggiata in figura) che si ottiene togliendo dal triangolo di vertici $(0,0)$, (x,y), $(x,-y)$ i punti per cui è $x^2-y^2>1$. Ci proponiamo di esprimere in funzione di x l'area s del settore iperbolico.

Si ha

$$s=xy-2\int_1^x\sqrt{\xi^2-1}\,\mathrm{d}\xi=x\sqrt{x^2-1}-$$
$$-\left[x\sqrt{x^2-1}+\log\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)\right]=\log\left(x+\sqrt{x^2-1}\right).$$

Esprimiamo ora x e y in funzione di s; si ha

$$x+y=x+\sqrt{x^2-1}=e^s$$

e, pertanto:

$$x-y=x-\sqrt{x^2-1}=e^{-s},$$

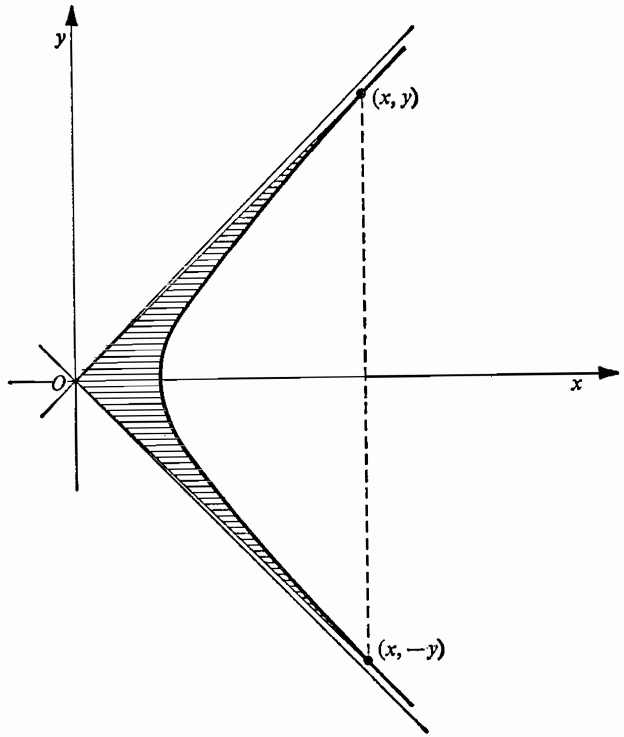

Figura 55.2

da cui

$$\left.\begin{aligned} x&=\frac{e^s+e^{-s}}{2}=\cosh s\,,\\ y&=\frac{e^s-e^{-s}}{2}=\sinh s\,.\end{aligned}\right\}\qquad [55.5]$$

Vi è una forte analogia con quanto si trova valutando l'area s del settore circolare del cerchio con centro nell'origine e raggio 1, di estremi (x, y) $(x, -y)$ (fig. 55.3). Da considerazioni elementari, oppure da un calcolo di integrali analogo a quello svolto, si ricava

$$\left.\begin{aligned} x &= \cos s\,, \\ y &= \sin s\,. \end{aligned}\right\} \qquad [55.6]$$

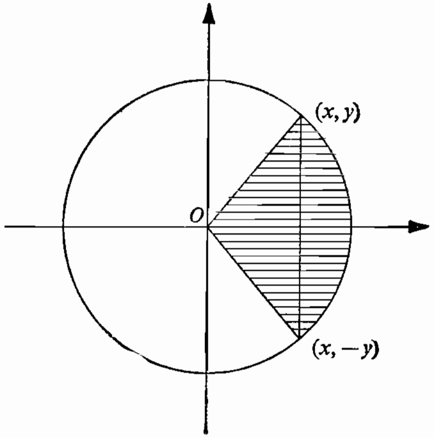

Figura 55.3

Dal confronto fra la [55.5] e la [55.6] risulta chiara l'analogia tra le funzioni circolari e le funzioni iperboliche e risulta giustificato il nome dato a queste ultime.

Nel calcolo di integrali abeliani dell'iperbole e del cerchio risulterà spesso conveniente fare ricorso alle [55.5] e alle [55.6] rispettivamente, anziché alle parametrizzazioni razionali.

Si voglia, ad esempio, calcolare l'integrale: $\int\sqrt{1-x^2}\,dx$. Si pone $x = \sin\vartheta$ assumendo ϑ variabile nell'intervallo $-\pi/2 < \vartheta < +\pi/2$. Si ha

$$\int\sqrt{1-x^2}\,dx = \int(\cos\vartheta)^2 d\vartheta = \int\frac{1+\cos 2\vartheta}{2}d\vartheta = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\sin 2\vartheta + c =$$

$$= \frac{\vartheta}{2} + \frac{1}{2}\sin\vartheta\cos\vartheta + c = \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + k\,.$$

Accenniamo ora brevemente ad altre classi di funzioni che si possono integrare elementarmente.

Si consideri l'integrale:

$$\int f(e^x)\,dx\,,$$

essendo f una funzione razionale; ponendo $e^x = t$, l'integrale si "razionalizza":

$$\int f(e^x)\,dx = \int f(t)\frac{dt}{t}\,.$$

Analogamente, si consideri l'integrale:

$$\int f(\cos t, \sin t)\,dt\,,$$

essendo f una funzione razionale di due variabili. Ponendo $x = \cos t$, $y = \sin t$, si ha $dx/dt = -\sin t = -y$; perciò l'integrale può essere così trasformato:

$$\int f(\cos t, \sin t)\,dt = \int f(x, y)\frac{dt}{dx}dx = -\int f(x, y)\frac{dx}{y}\,,$$

si riconosce che questo è un integrale abeliano appartenente al cerchio $x^2 + y^2 = 1$. Usando la nota rappresentazione parametrica del cerchio:

$$x = \frac{1-t^2}{1+t^2}\,, \qquad y = \frac{2t}{1+t^2}\,,$$

si ottiene:

$$\int f(\cos t, \sin t)\,dt = 2\int f\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\,, \frac{2t}{1+t^2}\right)\frac{dt}{1+t^2}\,.$$

Esempio. Si consideri l'integrale $\int dt/\sin t$. Con i simboli impiegati sopra, si ha:

$$\int\frac{dt}{\sin t} = -\int\frac{dx}{y^2} = -\int\frac{dx}{1-x^2} = -\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\log|1-x| - \frac{1}{2}\log|1+x| + k = \frac{1}{2}\log\left|\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right| + c = \log\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + k\,.$$

55.3 *Osservazione.* Nel paragrafo precedente e in questo abbiamo esaminato alcune classi di funzioni che sono integrabili elementarmente; si potrebbe proseguire questo studio, ma senza ottenere un risultato decisivo. Infatti mentre l'operazione di derivazione trasforma ogni funzione elementare in una funzione elementare, l'operazione di integrazione, in generale, porta fuori della classe delle funzioni elementari.

Il problema dell'integrazione è stato un incentivo importante all'introduzione di nuove classi di funzioni (cioè non comprese in quelle che abbiamo chiamato funzioni elementari), e alla costruzione di una delle più belle e importanti teorie matematiche: la teoria delle funzioni olomorfe.

Esercizi

1. Calcolare i seguenti integrali indefiniti:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}, \qquad \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx, \qquad \int \frac{\sqrt{x}dx}{(1+x)^2}, \qquad \int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx,$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\log x\, dx, \qquad \int \frac{e^x dx}{(e^x+1)^2}.$$

2. Dimostrare la relazione

$$\int_0^\pi \frac{dx}{a+b\cos x} = \frac{\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}$$

(dove è $|b|<c$).

56. Calcolo numerico degli integrali definiti

Ci poniamo il problema di calcolare, con un'approssimazione prefissata, un integrale definito: $\int_a^b f(x)dx$, dove f è una funzione continua. Non è sempre possibile conoscere esplicitamente una primitiva di f o, comunque, esprimere il valore dell'integrale mediante una formula in cui compaiono solo funzioni elementari: anzi si può dire che queste situazioni favorevoli devono ritenersi eccezionali. In certi casi poi (ad esempio: per funzioni f razionali un po' complicate) pur potendosi trovare una primitiva per la funzione integranda, può non essere conveniente il calcolo numerico per mezzo di questa.

È opportuno allora affrontare il problema del calcolo numerico degli integrali definiti con metodi diretti, che si ispirino alla definizione stessa di integrale.

Cominciamo col ricordare che, in virtù del teorema 51.3, le somme di Cauchy con parametro di finezza abbastanza piccolo forniscono un valore approssimato quanto si vuole dell'integrale di una funzione continua. Noi considereremo sempre — come si fa in pratica — suddivisioni dell'intervallo $[a, b]$ in intervalli di uguale ampiezza.[1]

È istruttivo, per cominciare, valutare l'errore che si commette calcolando la funzione nell'estremo sinistro (o destro) di ciascun intervallo della suddivisione: si tratta del cosidetto metodo dei rettangoli.

1) *Metodo dei rettangoli*

Fissato un intero $n>0$, si ponga

$$x_k = a + \frac{b-a}{n}k \qquad (k=0, 1, ..., n)$$

e si assuma come valore approssimato dell'integrale:

$$S_n = \frac{b-a}{n}\left(f(x_0)+f(x_1)+...+f(x_{n-1})\right).$$

56.1 Teorema *Posto* $\mathscr{I} = \int_a^b f(x)dx$, *e ammesso che si abbia* $|f'(x)| \leqslant M_1$, *vale la disuguaglianza:*

$$|\mathscr{I} - S_n| \leqslant \frac{M_1}{2}\frac{(b-a)^2}{n}. \qquad [56.1]$$

Premettiamo un lemma:

56.2 Lemma *Sia* φ *una funzione derivabile con derivata continua in* $[0, \sigma]$ $(\sigma > 0)$ *e tale che* $\varphi(0)=0$. *Allora si ha*

$$\int_0^\sigma \varphi(x)\,dx = \int_0^\sigma (\sigma - x)\varphi'(x)\,dx. \qquad [56.2]$$

[1] Dobbiamo però segnalare che ci sono procedimenti di integrazione approssimata di grande importanza concettuale in cui si utilizzano suddivisioni in intervalli di ampiezze diverse.