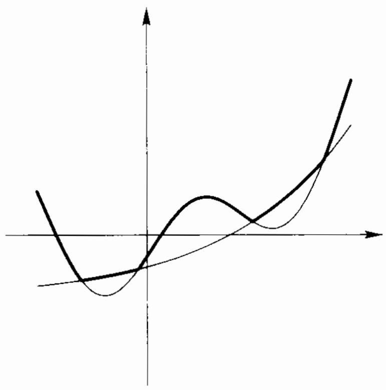

Fig. 2.4 : $f \vee g = \max\{f, g\}$

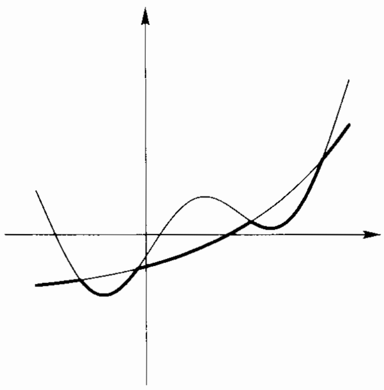

Fig. 2.5 : $f \wedge g = \min\{f, g\}$

2.9 - Numeri complessi

Un modo per presentare i vari insiemi numerici è quello della soluzione di equazioni: con i numeri naturali è possibile risolvere l'equazione $x + 3 = 4$, con gli interi $x + 4 = 3$, con i razionali $2x = 1$, con i reali $x^2 - 2 = 0$, mentre per il momento non si sa dare un senso alla "soluzione" dell'equazione $x^2 + 1 = 0$. Per superare questa impasse nella teoria, furono "immaginati" dei numeri opportuni, appunto i numeri immaginari.

Per estendere i numeri reali, introduciamo dunque l'unità immaginaria i , che ha la proprietà che

$$\mathrm{i}^2 = -1 ,$$

e definiamo i numeri complessi come le scritture della forma $a + ib$ con $a, b \in \mathbb{R}$. L'insieme dei numeri complessi si indica $\mathbb{C}$; i numeri reali possono essere visti come un particolare sottoinsieme dei numeri complessi, quelli della forma $a + 0\mathrm{i}$ (che si scrive semplicemente a).

Per ogni numero $z = a + ib$ definiamo la parte reale e la parte immaginaria

$$\Re(a + \mathrm{i}b) = a , \qquad \Im(a + \mathrm{i}b) = b \ :$$

notiamo che entrambi sono numeri reali, e che $z \in \mathbb{C}$ è reale se e solo se $\Im z = 0$; inoltre per ogni numero $z \in \mathbb{C}$ si ha

$$z = \Re z + \mathrm{i}\Im z .$$

Sui numeri complessi è possibile definire la somma

$$(a + \mathrm{i}b) + (c + \mathrm{i}d) = (a + c) + \mathrm{i}(b + d)$$

che estende quella di $\mathbb{R}$ e gode di tutte le proprietà della somma fra numeri reali, e il prodotto, che si esegue formalmente:

$$(a + \mathrm{i}b)(c + \mathrm{i}d) = ac + \mathrm{i}ad + \mathrm{i}bc + \mathrm{i}^2 bd = (ac - bd) + \mathrm{i}(ad + bc) .$$

Anche il prodotto è commutativo, associativo, distributivo rispetto alla somma, ha elemento neutro 1 e ogni numero complesso diverso dall'elemento neutro della somma (zero) ha inverso, che è dato da una formula piuttosto complicata: l' inverso di $a + \mathrm{i}b$ è

$$\frac{a}{a^2 + b^2} - \mathrm{i}\frac{b}{a^2 + b^2} ; \tag{2.26}$$

ad esempio, l' inverso di i è $-\mathrm{i}$. Vedremo poi (☞ corollario 2.18) che non serve ricordare questa formula, perché la divisione si esegue in modo molto più semplice.

Osserviamo che l' inverso è molto facile se il numero complesso è in realtà un numero reale non nullo a : in tal caso l' inverso (complesso) di a , dato dalla formula precedente, è $1/a$, quindi per dividere un numero complesso z per il numero reale a basta dividere per a sia la parte reale che quella immaginaria di z .

Esempio : $(2 - 3\mathrm{i})/4 = (1/2) - (3/4)\mathrm{i}$.

Osserviamo che il numero complesso 0 ha parte reale e parte immaginaria uguali a zero: questo ha come conseguenza il fatto che se due numeri complessi sono uguali allora la loro differenza (che è zero) ha parte reale e parte immaginaria zero, ma la parte reale della differenza è la differenza delle parti reali, quindi queste devono essere uguali, e lo stesso le parti immaginarie. Dunque un'equazione complessa dà origine, prendendone separatamente le parti reale e immaginaria, a due equazioni reali.

Esempio : l'equazione $2z + \mathrm{i} = \mathrm{i}z - 1$ equivale al sistema

$$\begin{cases} \Re(2z + \mathrm{i}) = \Re(\mathrm{i}z - 1) \\ \Im(2z + \mathrm{i}) = \Im(\mathrm{i}z - 1), \end{cases}$$

cioè, detta x la parte reale di z e y la sua parte immaginaria (che, ricordiamo, sono due numeri reali), equivale a

$$\begin{cases} \Re\big(2x + \mathrm{i}(2y + 1)\big) = \Re(-y - 1 + \mathrm{i}x) \\ \Im\big(2x + \mathrm{i}(2y + 1)\big) = \Im(-y - 1 + \mathrm{i}x) \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x = -y - 1 \\ 2y + 1 = x , \end{cases}$$

che ha come soluzione $(x, y) = (-1/5, -3/5)$, pertanto $z = -1/5 - 3\mathrm{i}/5$.

Peraltro, questo metodo non è molto efficiente; nell'esempio, l'equazione di partenza equivale a $(2 - \mathrm{i})z = -1 - \mathrm{i}$, cioè $z = -(1 + \mathrm{i})/(2 - \mathrm{i})$, che dà subito il risultato: z è il prodotto di $-(1 + \mathrm{i})$ per l' inverso (definito prima) di $2 - \mathrm{i}$.

A differenza dei numeri reali, su $\mathbb{C}$ non si definisce l'ordine (nel senso che non è possibile definirlo in modo da preservare le proprietà delle operazioni).

Introduciamo una struttura presente solo nei numeri complessi: ad ogni numero associamo il suo numero complesso coniugato.

Definizione : *si dice coniugato del numero* $z \in \mathbb{C}$ *il numero complesso*

$$\bar{z} = \Re z - \mathrm{i}\Im z .$$

Esempio : se $z = 3 - 2\mathrm{i}$, abbiamo $\bar{z} = 3 + 2\mathrm{i}$, e il numero $z + 2\mathrm{i}\bar{z} - 2\Re(z - \mathrm{i})$ vale pertanto $(3 - 2\mathrm{i}) + 2\mathrm{i}(3 + 2\mathrm{i}) - 2\Re(3 - 3\mathrm{i}) = 3 - 2\mathrm{i} + 6\mathrm{i} - 4 - 6 = -7 + 4\mathrm{i}$.

Si vede subito, applicando le definizioni, che valgono le seguenti proprietà:
1) $\Re(z + w) = \Re z + \Re w$, $\Im(z + w) = \Im z + \Im w$
2) $\Re\bar{z} = \Re z$, $\Im\bar{z} = -\Im z$
3) $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$
4) $\overline{zw} = \bar{z}\bar{w}$
5) $\bar{\bar{z}} = z$
6) $z \in \mathbb{R} \iff z = \bar{z}$.

Una facile conseguenza di queste sono le formule per esprimere la parte reale e la parte immaginaria di z in funzione di z e $\bar{z}$: infatti scrivendo $z = \Re z + \mathrm{i}\Im z$ si ha

$$\Re z = \frac{z + \bar{z}}{2}, \qquad \Im z = \frac{z - \bar{z}}{2\mathrm{i}} = -\frac{\mathrm{i}}{2}(z - \bar{z}) .$$

Dopo il coniugato, un altro numero importante (questa volta è un numero reale) associato a un numero complesso z è il suo modulo.

Definizione : *si dice modulo del numero complesso* z *il numero reale non negativo*

$$|z| = \sqrt{(\Re z)^2 + (\Im z)^2} .$$

Notiamo quindi che $z \mapsto |z|$ è una funzione da $\mathbb{C}$ in $\mathbb{R}$, e che $|z| = 0 \iff z = 0$. Se $z \in \mathbb{C}$ è reale (cioè se $\Im z = 0$), il modulo di z coincide con il valore assoluto del numero reale z; inoltre per ogni z si ha
1) $|z| = |\bar{z}|$
2) $|\Re z| \leq |z|$ (il primo è un valore assoluto di un numero reale, il secondo è un modulo)
3) $|\Im z| \leq |z|$
4) $z\bar{z} = |z|^2$

e per ogni $z, w \in \mathbb{C}$ si ha
5) $|zw| = |z||w|$
6) $|z + w| \leq |z| + |w|$
7) $|z| \leq |\Re z| + |\Im z|$

(le verifiche degli ultimi tre punti non sono immediate); come vedremo fra poco, dopo l'introduzione del piano di Gauss, la disuguaglianza triangolare 6) si può vedere in $\mathbb{C}$ nel suo significato geometrico (☞ figura 2.6): nel triangolo di vertici 0, z e $z + w$ le lunghezze dei lati sono $|z|$, $|w|$ e $|z + w|$, e come è noto ogni lato non può superare la somma delle lunghezze degli altri due.

Esempio : $|2 - 3\mathrm{i}| = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}$; un errore molto frequente è prendere il quadrato di $-3\mathrm{i}$ anziché quello della sola parte immaginaria -3: in questo caso si otterrebbe $|2 - 3\mathrm{i}|^2 = -5$, che fa subito sospettare, ma se il risultato è positivo c'è il rischio di non accorgersi dell'errore (✎ es. 2.45).

Citiamo, con la speranza di vederli diminuire, alcuni errori standard nell'applicazione delle proprietà del modulo. Consideriamo l'equazione

$$3z = 2\bar{z} - 2\mathrm{i} \ :$$

si trova spesso scritto: "passo al modulo" o peggio "applico il modulo," come se il modulo fosse un utensile, seguito da una fra le scritture

$$|3z| \begin{cases} = |2\bar{z}| + |2\mathrm{i}| \\ = |2\bar{z}| - |2\mathrm{i}| \\ = 2|\bar{z}| \pm 2\mathrm{i} \end{cases}$$

mentre le uniche possibilità corrette sono

$$|3z| = |2\bar{z} - 2\mathrm{i}| \qquad \text{oppure} \qquad |3z| \leq |2\bar{z}| + |2\mathrm{i}|$$

o infine $3|z| \leq 2|z| + 2$.

La proprietà 4), apparentemente innocua, ha una conseguenza importante.

Corollario 2.18 : *per ogni* $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ *si ha*

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} \, .$$

Questo corollario è fondamentale, dato che è quello che ci dà la possibilità di dividere per un numero complesso (non nullo) senza ricordare la complicata formula (2.26) per l'inverso: infatti il corollario dice che l'inverso di $z \neq 0$ è $\bar{z}/|z|^2$, e che dividere per z è equivalente a moltiplicare per $\bar{z}$ (che è un numero complesso) e poi dividere il risultato per il numero reale $|z|^2$; questo, nella pratica, si compie moltiplicando numeratore e denominatore per il coniugato del denominatore.

Esempio : l'inverso di $z = 3 - 7\mathrm{i}$ è dato da

$$\frac{1}{3 - 7\mathrm{i}} = \frac{3 + 7\mathrm{i}}{|3 - 7\mathrm{i}|^2} = \frac{3 + 7\mathrm{i}}{9 + 49} = \frac{3}{58} + \frac{7}{58}\mathrm{i} \, .$$

Esempio : dovendo calcolare $\dfrac{z}{w}$, si può moltiplicare numeratore e denominatore per il coniugato del denominatore:

$$\frac{z}{w} = \frac{z\bar{w}}{w\bar{w}} = \frac{z\bar{w}}{|w|^2} \, .$$

Ad esempio (✎ es. 2.50),

$$\frac{2 + \mathrm{i}}{3 - 2\mathrm{i}} = \frac{(2 + \mathrm{i})(3 + 2\mathrm{i})}{(3 - 2\mathrm{i})(3 + 2\mathrm{i})} = \frac{4 + 7\mathrm{i}}{13} = \frac{4}{13} + \frac{7}{13}\mathrm{i} \, .$$

Usando la scrittura $z = a + ib$ di un numero complesso, è possibile risolvere alcune equazioni che non si sanno risolvere (o non hanno senso) in $\mathbb{R}$.

Esempio : per risolvere l'equazione $z^2 + 1 = 0$, poniamo $z = x + \mathrm{i}y$ e cerchiamo delle coppie (x, y) di numeri reali che risolvono l'equazione complessa $(x + \mathrm{i}y)^2 + 1 = 0$, cioè $x^2 - y^2 + 2\mathrm{i}xy + 1 = 0$. Prendendo la parte reale e la parte immaginaria dell'equazione otteniamo il sistema di due equazioni reali

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + 1 = 0 \\ 2xy = 0 \, , \end{cases}$$

che equivale a

$$\begin{cases} y = 0 \\ x^2 = -1 \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y^2 = 1 \, : \end{cases}$$

il primo sistema non ha soluzioni (x deve essere un numero reale), mentre il secondo ci dà le soluzioni cercate $z = \mathrm{i}$ e $z = -\mathrm{i}$ (✎ es. 2.52). Anche in questo caso, vedremo che ci sono metodi più efficienti della sostituzione $z = x + \mathrm{i}y$.

I numeri complessi possono essere rappresentati come punti del piano (piano di Gauss), associando al numero complesso z il punto $(\Re z, \Im z)$; in tal modo, la somma fra numeri complessi segue la consueta regola del parallelogramma (☞ figura 2.6). Poiché l'ascissa corrisponde alla parte reale, e l'ordinata alla parte immaginaria, nel piano di Gauss è d'uso parlare di asse reale e di asse immaginario, anziché di asse delle ascisse e di asse delle ordinate. Nel piano di Gauss, il punto corrispondente a $\bar{z}$ è il simmetrico di quello corrispondente a z rispetto all'asse reale.

Con questa rappresentazione, la distanza del punto corrispondente a z dall'origine (che corrisponde al numero complesso 0) è data, mediante il teorema di Pitagora, da $\sqrt{(\Re z)^2 + (\Im z)^2}$: dunque, $|z|$ è la distanza di z da 0 , e il modulo della differenza di due numeri complessi z e w è uguale alla distanza fra i due punti del piano che corrispondono a z e w . D'ora in poi, identificheremo tacitamente i numeri complessi con i punti del piano che li rappresentano.

Osserviamo che l'unico numero di modulo zero è lo zero, e che i numeri complessi di modulo $\varrho > 0$ sono i punti della circonferenza centrata nell'origine e di raggio ϱ ; osserviamo inoltre che se $a > 0$ è un numero reale, az si ottiene dal punto z con un'omotetia di ragione a e centro l'origine del piano di Gauss.

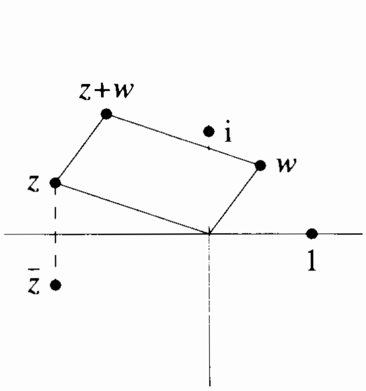

Fig. 2.6 : il piano di Gauss

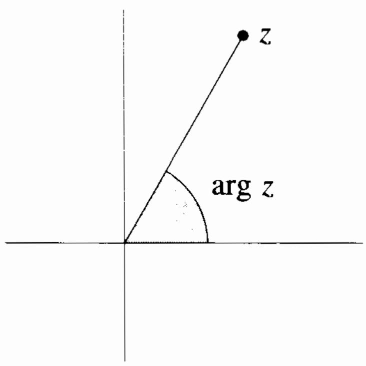

Fig. 2.7 : modulo e argomento

Se $z \neq 0$, la semiretta uscente da 0 e passante per z forma con il semiasse reale positivo un angolo che, misurato in radianti (☞ [MPB], sezioni 2.8 e 2.9) e con le solite convenzioni di verso, viene detto argomento di z (☞ figura 2.7). Poiché la misura dell'angolo è definita a meno di multipli interi di 2π, l'argomento $\arg z$ non è univocamente determinato da z, ma è definito a meno di multipli di 2π. Tra tutti i possibili valori di $\arg z$, uno solo è compreso nell'intervallo $[0, 2\pi[$, e viene talvolta indicato con la scrittura $\arg\min z$ (✎ es. 2.53).

Esempio : se $z = 1 + \mathrm{i}$ è $\arg\min z = \pi/4$; se $z = -1$ è $\arg\min z = \pi$.

Osserviamo che se $z \neq 0$ non è immaginario (questo non vuol dire che è reale, solo che non ha parte reale zero) e $\vartheta = \arg z$ allora

$$\tan\vartheta = \frac{\Im z}{\Re z} .$$

Da questo (☞ [MPB], sezione 3.6) non si può subito dedurre $\vartheta = \arctan(\Im z/\Re z)$: questo è vero, a meno di multipli di 2π, solo se $\Re z > 0$, mentre se $\Re z < 0$ bisogna aggiungere π, così che per ogni $z \neq 0$ si ha

$$\arg z = \begin{cases} \arctan\frac{\Im z}{\Re z}\ (+2k\pi) & \text{se } \Re z > 0 \\ \pi + \arctan\frac{\Im z}{\Re z}\ (+2k\pi) & \text{se } \Re z < 0 \\ \frac{\pi}{2}\ (+2k\pi) & \text{se } \Re z = 0 \text{ e } \Im z > 0 \\ \frac{3\pi}{2}\ (+2k\pi) & \text{se } \Re z = 0 \text{ e } \Im z < 0. \end{cases} \tag{2.27}$$

In ogni caso, però, se $z \neq 0$ possiamo scrivere

$$\cos(\arg z) = \frac{\Re z}{|z|}, \qquad \operatorname{sen}(\arg z) = \frac{\Im z}{|z|},$$

o anche

$$\Re z = |z|\cos(\arg z), \qquad \Im z = |z|\operatorname{sen}(\arg z) .$$

In particolare

$$z = |z|\big(\cos(\arg z) + \mathrm{i}\operatorname{sen}(\arg z)\big) .$$

Se sono evidenziati i valori di $\varrho \geq 0$ e $\vartheta \in \mathbb{R}$ per cui si ha

$$z = \varrho(\cos\vartheta + \mathrm{i}\operatorname{sen}\vartheta) ,$$

si dice che $z \in \mathbb{C}$ è scritto in forma trigonometrica (mentre la scrittura $z = a + ib$ si dice forma algebrica); osserviamo subito che se z è scritto in forma trigonometrica allora $\varrho = |z|$ e, se $z \neq 0$, $\vartheta = \arg z$.

Esempio : per scrivere in forma trigonometrica il numero complesso $z = 1 - \mathrm{i}$ vediamo che $|z| = \sqrt{2}$, quindi $z = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \mathrm{i}\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$; un angolo che ha coseno $1/\sqrt{2}$ e seno $-1/\sqrt{2}$ è $-\pi/4$, quindi la forma trigonometrica di z è $\sqrt{2}\big(\cos(-\pi/4) + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}(-\pi/4)\big)$ (✎ es. 2.55).

Osserviamo che l'argomento di $\bar{z}$ è l'opposto dell'argomento di z , quindi se la forma trigonometrica di z è $\varrho(\cos\vartheta + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\vartheta)$ quella di $\bar{z}$ è

$$\bar{z} = \varrho\big(\cos(-\vartheta) + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}(-\vartheta)\big) .$$

Inoltre, se $z \neq 0$ la forma trigonometrica di $1/z$ è

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{\varrho}\big(\cos(-\vartheta) + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}(-\vartheta)\big) .$$

La forma trigonometrica (che corrisponde alle coordinate polari nel piano di Gauss) si rivela molto utile per la facilità con cui si possono calcolare i prodotti.

Proposizione 2.19 : *dati due numeri complessi*

$$z = \varrho(\cos\vartheta + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\vartheta) , \qquad w = r(\cos\phi + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\phi)$$

si ha

$$zw = (\varrho r)\big(\cos(\vartheta + \phi) + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}(\vartheta + \phi)\big) , \tag{2.28}$$

cioè il modulo del prodotto è il prodotto dei moduli, l'argomento del prodotto è la somma degli argomenti.

Per verificarlo, basta scrivere il prodotto

$$\begin{aligned} zw &= \varrho(\cos\vartheta + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\vartheta) \cdot r(\cos\phi + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\phi) \\ &= \varrho r[(\cos\vartheta\cos\phi - \mathrm{sen}\,\vartheta\,\mathrm{sen}\,\phi) + \mathrm{i}(\cos\vartheta\,\mathrm{sen}\,\phi + \mathrm{sen}\,\vartheta\cos\phi)] \end{aligned}$$

e ricordare le formule del seno e del coseno della somma (☞ [MPB], sezione 2.9).

Dalla forma trigonometrica dell' inverso si deduce anche (se $w \neq 0$)

$$\frac{z}{w} = \frac{\varrho}{r}\big(\cos(\vartheta - \phi) + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}(\vartheta - \phi)\big) .$$

Esempio : se $|z| = 2$ e $\arg z = \pi/4$, e se $|w| = 3$ e $\arg w = \pi/6$, allora

$$zw = 6\Big(\cos\frac{5\pi}{12} + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\frac{5\pi}{12}\Big) , \qquad \frac{z}{w} = \frac{2}{3}\Big(\cos\frac{\pi}{12} + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{12}\Big) .$$

Osserviamo ora in particolare cosa accade moltiplicando un numero z per un numero complesso w avente modulo 1 e argomento ϕ: il modulo di zw rimane uguale a $|z|$, quindi zw e z sono sulla stessa circonferenza centrata nell'origine del piano di Gauss, mentre l'argomento di zw aumenta di ϕ rispetto a $\arg z$. Allora, il punto zw si ottiene dal punto z ruotandolo di ϕ in senso antiorario; dunque i numeri complessi di modulo uno agiscono, nei prodotti, come rotazioni del piano di Gauss. Notiamo che qualunque numero complesso non nullo z può essere scritto come prodotto di $|z|$, che è un numero reale positivo, per $z/|z|$, che è un numero complesso di modulo uno e argomento uguale all'argomento di z. Allora la moltiplicazione per z equivale, nel piano di Gauss, ad una rotazione di $\arg z$ seguita da un'omotetia di ragione $|z|$.

Esempio : sapendo che $|w| = 2$, il prodotto zw è il seguente:

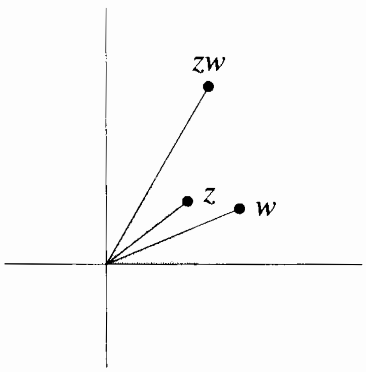

Fig. 2.8 : esempio di prodotto

Se moltiplichiamo fra loro n esemplari del numero z, scritto in forma trigonometrica, otteniamo un'importante conseguenza (che viene chiamata formula di de Moivre): se $z = \varrho(\cos\vartheta + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\vartheta)$, allora per ogni $n \in \mathbb{Z}$ si ha

$$z^n = \varrho^n\big(\cos(n\vartheta) + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}(n\vartheta)\big) \ : \tag{2.29}$$

questa è la formula della potenza n-esima di z (➠ appendice 2.4).

Esempio : se $z = 1 + \mathrm{i} = \sqrt{2}\big(\cos(\pi/4) + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}(\pi/4)\big)$ allora

$$z^{60} = 2^{30}\Big(\cos\frac{60\pi}{4} + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\frac{60\pi}{4}\Big) = 2^{30}\big(\cos(15\pi) + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}(15\pi)\big) = -2^{30} \ .$$

È chiaramente improponibile trovare z^{60} svolgendo i calcoli interamente in forma algebrica (✎ es. 2.58).

Nella trattazione dei numeri reali, viene introdotta (☞ [MPB], sezione 3.3) la radice quadrata del numero non negativo x, che è l'unico numero maggiore o uguale a zero che ha quadrato x: dunque si considera l'equazione $y^2 = x$ e tra le due soluzioni y_1 e y_2 se ne sceglie una (appunto quella maggiore o uguale a zero) per chiamarla "la" radice quadrata di x . Per estendere questa nozione in $\mathbb{C}$ il problema è la mancanza della struttura d'ordine: dato che come numeri complessi non possiamo più dire chi tra 1 e -1 è "maggiore o uguale a zero," come possiamo scegliere uno dei due e chiamarlo "la" radice quadrata di 1 ? La risposta è che non c'è alcun modo sensato di farlo, così in $\mathbb{C}$ non si potrà parlare della radice quadrata (o più in generale di quella n-esima), ma delle radici quadrate, al plurale. D'altra parte, il motivo per introdurre $\mathbb{C}$ era la possibilità di risolvere equazioni tipo $z^2+1=0$, che siamo riusciti a risolvere trovando $z=\pm\mathrm{i}$, le due radici quadrate di -1 ; non definiremo allora "la" radice, ma "le" radici di un numero complesso.

Definizione : *se* $n \in \mathbb{N}^+$, *un numero complesso* z *è una radice* n*-esima di* w *se* $z^n = w$.

Il prossimo risultato chiarisce completamente la situazione.

Teorema 2.20 : *per ciascun valore di* $n \in \mathbb{N}^+$, *ogni numero complesso diverso da zero ha esattamente* n *radici* n*-esime distinte. Se* $r>0$, *le radici* n*-esime di* $r(\cos\phi + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\phi)$ *hanno modulo* $\sqrt[n]{r}$ *e come argomento uno dei numeri* $\vartheta_0,\ldots,\vartheta_{n-1}$ *dati da*

$$\begin{cases} \vartheta_0 = \dfrac{\phi}{n} = \dfrac{\phi}{n} + \dfrac{2\cdot 0\pi}{n} \\ \vartheta_1 = \dfrac{\phi}{n} + \dfrac{2\pi}{n} = \dfrac{\phi}{n} + \dfrac{2\cdot 1\pi}{n} \\ \vartheta_2 = \dfrac{\phi}{n} + \dfrac{4\pi}{n} = \dfrac{\phi}{n} + \dfrac{2\cdot 2\pi}{n} \\ \vdots \\ \vartheta_{n-1} = \dfrac{\phi}{n} + \dfrac{2(n-1)\pi}{n} \,. \end{cases}$$

In conclusione, se $w = r(\cos\phi + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\phi)$ è diverso da zero le sue n radici n-esime sono date dalla formula (✎ es. 2.60)

$$z_k = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\phi}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right) + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\left(\frac{\phi}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)\right], \qquad k=0,\ldots,n-1 \,.$$

Esempio : le radici cubiche di 1 (modulo 1 , argomento 0) sono

$$\begin{cases} z_0 = 1 \\ z_1 = 1\left(\cos\dfrac{2\pi}{3} + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\dfrac{2\pi}{3}\right) = -\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ z_2 = 1\left(\cos\dfrac{4\pi}{3} + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\dfrac{4\pi}{3}\right) = -\dfrac{1}{2} - \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2} \,. \end{cases}$$

Un caso speciale è quello $n = 2$, in cui ci sono due radici quadrate i cui argomenti differiscono di π : poiché queste radici sono una l'opposto dell'altra, cioè $z_1 = -z_0$, nel caso $n = 2$ si scrive talvolta $\pm\sqrt{z}$ per indicare le due radici quadrate di z , intendendo che esse sono più o meno una qualsiasi di esse. Invece, nel caso generale, la scrittura $\sqrt[n]{z}$ indica n numeri diversi, uno per ciascuno degli n valori che può assumere la radice n-esima.

Nel caso particolare $n = 2$, si può trovare la radice quadrata anche senza passare alla forma trigonometrica (che non sempre è agevole da ricavare): infatti, se $w = a + ib$ e $z = x + iy$ l'equazione $z^2 = w$ equivale al sistema

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases}$$

che, a parte il caso facile in cui w è un numero reale (cioè $b = 0$, da cui $z = \pm\sqrt{a}$), equivale a

$$\begin{cases} x = b/2y \\ 4y^4 + 4ay^2 - b^2 = 0 \, . \end{cases}$$

La seconda equazione, ricordando che y è un numero reale e deve avere quadrato non negativo, diviene

$$y^2 = \frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2} \, ,$$

da cui si ricavano facilmente i valori di y e di $x = b/2y$.

Avendo a disposizione le radici, possiamo risolvere un certo numero di equazioni.

Esempio : risolviamo l'equazione di secondo grado a coefficienti complessi; se $a, b, c \in \mathbb{C}$ con $a \neq 0$, vogliamo risolvere l'equazione

$$az^2 + bz + c = 0 \, .$$

Notiamo che $az^2 + bz + c = a(z^2 + 2bz/2a + b^2/4a^2) + c - b^2/4a$, quindi l'equazione equivale a

$$\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \, .$$

Questo significa che $z + b/2a$ è una delle radici quadrate del numero complesso al secondo membro (in generale due, una se il secondo membro è nullo), pertanto

$$z + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

(le radici di $4a^2$ sono due, ma il $\pm$ tiene conto di tutti i casi), cioè

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \, ,$$

che è la consueta formula ma con un significato diverso: qui la radice esiste sempre, perché siamo in campo complesso, quindi in $\mathbb{C}$ un'equazione di secondo grado ha sempre soluzione.

Esempio : mettiamo in pratica quanto visto per risolvere l'equazione $z^2 - 2z + 2 = 0$; la formula dà

$$z = \frac{2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = \frac{2 \pm 2\mathrm{i}}{2} = 1 \pm \mathrm{i} \ :$$

le soluzioni sono allora $z = 1 + \mathrm{i}$ e $z = 1 - \mathrm{i}$ (✎ es. 2.62).

Osserviamo che le radici n-esime di un numero complesso z

a) hanno tutte lo stesso modulo, quindi nel piano di Gauss sono sulla stessa circonferenza centrata nell'origine, di raggio pari alla radice n-esima del modulo di z

b) hanno argomenti che differiscono per $2\pi/n$, pertanto formano i vertici di un n-agono regolare inscritto nella circonferenza precedente

c) una delle radici ha argomento pari a $1/n$ dell'argomento di z , ed è quindi facilmente individuabile: basta dividere in n parti l'angolo tra il semiasse reale positivo e la semiretta per z uscente dall'origine (✎ es. 2.63).

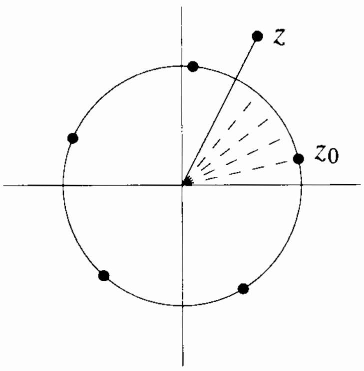

Fig. 2.9 : radici quinte di z

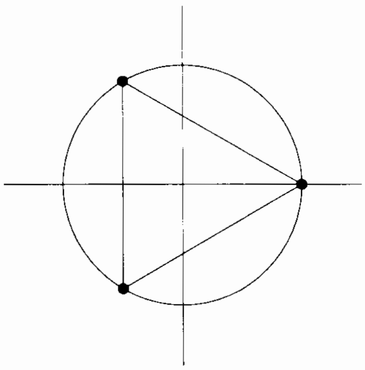

Fig. 2.10 : radici cubiche di 1

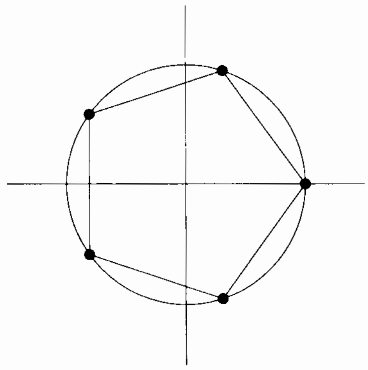

Fig. 2.11 : radici quinte di 1

In particolare, le radici n-esime di 1 sono i vertici dell'n-agono regolare inscritto nella circonferenza unitaria e avente un vertice in $(1, 0)$.

Concludiamo con un'ulteriore notazione dei numeri complessi: se, con una scelta di simboli le cui ragioni spiegheremo più avanti, ☞ appendice 5.8, poniamo per ogni $t \in \mathbb{R}$

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} = \cos t + \mathrm{i} \operatorname{sen} t \ , \tag{2.30}$$

abbiamo definito una funzione da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{C}$ che risulta periodica di periodo 2π (in particolare, da $\mathrm{e}^{\mathrm{i}r} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}s}$ non segue $r = s$, ma solo $r = s + 2k\pi$). Allora il numero complesso di modulo ϱ e argomento ϑ può essere scritto in forma abbreviata $\varrho \mathrm{e}^{\mathrm{i}\vartheta}$. Questa è la notazione esponenziale, ed ha la sua ragione d'essere nel fatto che la formula del prodotto (2.28) e quella della potenza (2.29) danno rispettivamente

$$\varrho \mathrm{e}^{\mathrm{i}\vartheta} \cdot r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi} = \varrho r \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\vartheta+\phi)} \ , \qquad \left(\varrho \mathrm{e}^{\mathrm{i}\vartheta}\right)^n = \varrho^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\vartheta} \ ,$$

proprio come si avrebbe usando formalmente le proprietà dell'esponenziale. Non bisogna però cadere nell'errore di eseguire le radici allo stesso modo: da $\varrho^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\vartheta} = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}$ non segue che $\vartheta = \phi/n$, ma solo (come detto sopra) $\vartheta = (\phi + 2k\pi)/n$.

Esempio : $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = -1$, $\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi} = 1$, $2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3} = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$.

Esercizio 2.42 : calcolate:
a) $(2-\mathrm{i})+(1+3\mathrm{i})$
b) $(2-\mathrm{i})(1+3\mathrm{i})$
c) $-\mathrm{i}(2-\mathrm{i})+(3-\mathrm{i})(\mathrm{i}+2)$.

Esercizio 2.43 : calcolate la parte reale, la parte immaginaria e il coniugato del numero $\mathrm{i}(2\mathrm{i}-3)+(\mathrm{i}-1)\overline{(3+4\mathrm{i})}$.

Esercizio 2.44 : calcolate $3z-\mathrm{i}\bar{z}+(2+\mathrm{i})z^2$ se $z=1-\mathrm{i}$.

Esercizio 2.45 : calcolate $|3\mathrm{i}+5|$, $|-6\mathrm{i}|$, $|-\mathrm{i}+4|$.

Esercizio 2.46 : disegnate nel piano di Gauss l'insieme $A\cap B$, dove $A=\{z\in\mathbb{C}: |z|=1\}$ e $B=\{z\in\mathbb{C}:\Re z>1/2\}$.

Esercizio 2.47 : trovate l'inverso di $2-3\mathrm{i}$.

Esercizio 2.48 : calcolate $\dfrac{3z-\mathrm{i}|z|^2-(2-\mathrm{i})\bar{z}}{2\Re z-\Im z}$ se $z=2+\mathrm{i}$.

Esercizio 2.49 : calcolate $\Im\Big(\mathrm{i}z\bar{z}+\dfrac{|z|^2}{z}\Big)$ se $z=1+3\mathrm{i}$.

Esercizio 2.50 : calcolate:
a) $1/(2-3\mathrm{i})$
b) $(2-\mathrm{i})/(3+\mathrm{i})$
c) $\dfrac{2+\mathrm{i}-\overline{(3-\mathrm{i})}}{3\mathrm{i}+1}$
d) $\dfrac{\mathrm{i}z-2\bar{z}}{\mathrm{i}+z}$ se $z=3+\mathrm{i}$
e) $\Re\Big(\dfrac{|z|^2-2\bar{z}}{\mathrm{i}z}\Big)$ se $z=2+\mathrm{i}$.

Esercizio 2.51 : trovate le soluzioni (z,w) , con $z,w\in\mathbb{C}$, dei sistemi
a) $\begin{cases} z\bar{w}=\mathrm{i} \\ |z|^2w+z=1 \end{cases}$
b) $\begin{cases} z+w=1+\mathrm{i} \\ |w|^2+\bar{z}=1-\mathrm{i} \end{cases}$
c) $\begin{cases} z^2-\bar{z}^2=4\mathrm{i} \\ (1+\mathrm{i})z=(1-\mathrm{i})\bar{z} \end{cases}$.

Esercizio 2.52 : risolvete l'equazione $z^2=\bar{z}$, e rappresentatene le eventuali soluzioni nel piano di Gauss.

Esercizio 2.53 : dite (questa volta intendiamo proprio "dite," non "dimostrate") se arg min$(7+125\mathrm{i})$ appartiene a $[0,\pi/6]$, $[\pi/6,\pi/3]$ o $[\pi/3,\pi/2]$.

Esercizio 2.54 : trovate l'argomento di $-3-3\mathrm{i}$ e l'argomento di $1+\mathrm{i}\sqrt{3}$.

Esercizio 2.55 : esprimete in forma trigonometrica il numero complesso $1-\mathrm{i}\sqrt{3}$ e il numero complesso $-\mathrm{i}$.

Esercizio 2.56 : esprimete in forma algebrica il numero complesso che ha modulo 3 e argomento $16\pi/3$, e disegnatelo nel piano di Gauss.

Esercizio 2.57 : moltiplicate e dividete tra loro i numeri scritti in forma trigonometrica nell'esercizio 2.55, e fate la verifica eseguendo le operazioni in forma algebrica.

Esercizio 2.58 : scrivete il cubo e la decima potenza di $z = 2\sqrt{3} - 2\mathrm{i}$, esprimendo poi il risultato sia in forma trigonometrica che in forma algebrica.

Esercizio 2.59 : se $z = 1 + \mathrm{i}$, calcolate $\bar{z}\, z^7$.

Esercizio 2.60 : scrivete le radici cubiche di $\mathrm{i} - 1$ e le radici quarte di $-1 - \mathrm{i}\sqrt{3}$.

Esercizio 2.61 : trovate $|w - 2|$, dove w è la soluzione dell'equazione $w^3 = 1$ tale che $\Im w > 0$.

Esercizio 2.62 : risolvete le seguenti equazioni:
a) $z^2 - 2\mathrm{i}z - (3 + \mathrm{i}\sqrt{3})/2 = 0$
b) $z^2 + z + (3 + 2\mathrm{i}\sqrt{3})/4 = 0$.

Esercizio 2.63 : disegnate nel piano di Gauss:
a) le radici quadrate di $1 - \mathrm{i}$
b) le soluzioni dell'equazione $z^4 = 2z$
c) le radici quinte di i
d) il poligono che ha come vertici le soluzioni delle equazioni $z^2 = \mathrm{i}$ e $z^2 = -2\mathrm{i}$.