ANALISI MATEMATICA III – ESERCITAZIONE DI FINE CORSO

PROF. BRUNO RUBINO – A.A. 2006/07

ARGOMENTI TRATTATI

1) PROBLEMA DI DIRICHLET PER L'EQUAZIONE DI LAPLACE NEL CERCHIO

2) ~~Calcolo~~, mediante la teoria dei residui, dell'integrale

$$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\, dx$$

3) Calcolo, mediante la teoria dei residui, dell'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}^2(x)}{(1+x^2)^2}\, dx$$

4) Risoluzione dell'equazione integrale

$$\operatorname{sen}(2t) = x(t) - \int_0^t x(\tau)\operatorname{sen}(t-\tau)\, d\tau$$

mediante trasformata di Laplace

5) Risoluzione, mediante trasformate di Laplace, del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + y = 8\cos(t) \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = -1 \end{cases}$$

6) Risoluzione, mediante trasformate di Fourier, dell'equazione differenziale

$$y(x) - y'(x) = H(x - x^2)\, e^{-x}$$

7) Risoluzione dell'esercizio sulle serie di Fourier previsto nella prova scritta del 21/3/05

8) Risoluzione, per separazione di variabili, dell'esercizio

$$\begin{cases} u_{tt} - 2u_{xx} = 0 & 0 < x < 6 \\ u(x,0) = f(x) & 0 < x < 6 \\ u_t(x,0) = 0 & 0 < x < 6 \\ u_x(0,t) = u_x(6,t) = 0, & t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

dove
$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } 0 \leq x \leq 3 \\ 12 - 2x & \text{se } 3 < x \leq 6 \end{cases}$$

9) Risoluzione, per separazione di variabili, dell'esercizio

$$\begin{cases} u_t - 9u_{xx} = 0 & 0 < x < \pi, \ t > 0 \\ u(x,0) = x^2 & 0 < x < \pi \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 & t > 0. \end{cases}$$

ESERCIZIO 1 – Sia dato il problema di Dirichlet per l'equazione di Laplace

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 & \text{in } \Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 < 1\} \\ u_{|\partial\Omega} = \varphi & \varphi \in C^1 \end{cases}$$

Cerchiamo una soluzione $u = u(x,y)$, $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ per separazione di variabili.
Sappiamo che, se tale soluzione esiste, allora è unica.
Per risolvere il problema è naturale introdurre le coordinate polari

$$\begin{cases} x = \rho \cos\vartheta & 0 \le \rho \le 1 \\ y = \rho \operatorname{sen}\vartheta & -\pi < \vartheta \le \pi \end{cases}$$

Detta allora $U(\rho, \vartheta) = u(x,y)$, risulta

$$u_x = \rho_x U_\rho + \vartheta_x U_\vartheta \quad , \quad u_y = \rho_y U_\rho + \vartheta_y U_\vartheta$$

$$u_{xx} = \rho_{xx} U_\rho + \vartheta_{xx} U_\vartheta + \rho_x^2 U_{\rho\rho} + \vartheta_x^2 U_{\vartheta\vartheta} + 2\rho_x \vartheta_x U_{\rho\vartheta}$$

$$u_{yy} = \rho_{yy} U_\rho + \vartheta_{yy} U_\vartheta + \rho_y^2 U_{\rho\rho} + \vartheta_y^2 U_{\vartheta\vartheta} + 2\vartheta_y \rho_y U_{\rho\vartheta}$$

~~e sommando le ultime due, tenu~~

~~u_{xx}~~ e sostituendo u_{xx} ed u_{yy} nell'equazione di Laplace

$$(\rho_{xx} + \rho_{yy}) U_\rho + (\vartheta_{xx} + \vartheta_{yy}) U_\vartheta + (\rho_x^2 + \rho_y^2) U_{\rho\rho} + (\vartheta_x^2 + \vartheta_y^2) U_{\vartheta\vartheta} + 2(\rho_x \vartheta_x + \rho_y \vartheta_y) U_{\rho\vartheta} = 0 \qquad (1.1)$$

Risulta $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$, da cui

$$\rho_x = \frac{1}{2}\frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,, \quad \rho_y = \frac{1}{2}\frac{2y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\rho_{xx} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{x\left(-\frac{1}{2}\right)2x}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3}$$

$$= \frac{x^2+y^2-x^2}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3} = \frac{y^2}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3}$$

$$\rho_{yy} = \frac{x^2}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3}$$ (in analogia alla precedente)

D'altra parte, per $\vartheta \in (-\pi/2, \pi/2)$ si ha $\vartheta = \operatorname{arctg}(y/x)$. Negli altri due quadranti la relazione è valida a meno di costanti (che non influiscono dopo la derivazione). Si ha pertanto

$$\vartheta_x = -\frac{y}{x^2}\frac{1}{1+y^2/x^2} = -\frac{y}{x^2+y^2}$$

$$\vartheta_y = \frac{1}{x}\frac{1}{1+y^2/x^2} = \frac{x}{x^2+y^2}$$

$$\vartheta_{xx} = +\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\,, \quad \vartheta_{yy} = \frac{-2yx}{(x^2+y^2)^2}$$

Calcoliamoci ~~per~~ i vari coefficienti dell'equazione (1.1)

$$\rho_{xx}+\rho_{yy} = \frac{x^2+y^2}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{\rho}$$

$$\vartheta_{xx}+\vartheta_{yy} = 0$$

$$\rho_x^2+\rho_y^2 = \frac{x^2}{x^2+y^2} + \frac{y^2}{x^2+y^2} = 1$$

$$\vartheta_x^2+\vartheta_y^2 = \frac{y^2}{(x^2+y^2)^2}+\frac{x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{1}{x^2+y^2} = \frac{1}{\rho^2}$$

$$2\left(\rho_x\vartheta_x+\rho_y\vartheta_y\right) = 2\,\frac{x}{\sqrt{x^2y^2}}\left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right)+$$

$$+2\,\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\frac{x}{x^2+y^2}=0$$

Sostituendo quanto trovato nella (1,1) abbiamo

$$\frac{1}{\rho}U_\rho + U_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho^2}U_{\vartheta\vartheta} = 0 \qquad (1.2)$$

La funzione $U=U(\rho,\vartheta)$ deve essere di classe C^2 per $0\leq\rho<1$ e continua per $0\leq\rho\leq 1$ con $U(1,\vartheta)=\varphi(\vartheta)$.
La funzione $\varphi=\varphi(\vartheta)$ assegnata sul bordo è di classe C^1 e 2π-periodica. Anche la soluzione $U=U(\rho,\vartheta)$ deve essere 2π-periodica in ϑ.

Cerchiamo adesso soluzioni della (1.2) a variabili separabili:

$$U(\rho,\vartheta)=\varphi(\rho)\psi(\vartheta).$$

Sostituendo nella (1,2) si ha

$$\frac{1}{\rho}\varphi'(\rho)\psi(\vartheta)+\varphi''(\rho)\psi(\vartheta)+\frac{1}{\rho^2}\varphi(\rho)\psi''(\vartheta)=0$$

Dividendo per $\varphi(\rho)\psi(\vartheta)$ si ottiene

$$\frac{1}{\rho}\frac{\varphi'(\rho)}{\varphi(\rho)}+\frac{\varphi''(\rho)}{\varphi(\rho)}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\psi''(\vartheta)}{\psi(\vartheta)}=0$$

da cui moltiplicando per ρ^2 e portando l'ultimo termine a secondo membro

$$\rho\,\frac{\varphi'(\rho)}{\varphi(\rho)}+\rho^2\frac{\varphi''(\rho)}{\varphi(\rho)}=-\frac{\psi''(\vartheta)}{\psi(\vartheta)}$$

Poichè il primo membro è funzione della variabile indipendente ρ mentre il secondo membro è funzione della variabile indipendente ϑ, dovendo l'uguaglianza sussistere $\forall\rho$ e $\forall\vartheta$, significa che entrambe queste quantità sono uguali alla medesima <u>COSTANTE</u> $\lambda\in\mathbb{R}$:

$$\rho^2\frac{\varphi''(\rho)}{\varphi(\rho)}+\rho\,\frac{\varphi'(\rho)}{\varphi(\rho)}=\lambda \qquad (1.3)$$

$$-\frac{\psi''(\vartheta)}{\psi(\vartheta)}=\lambda \qquad (1.4)$$

La separazione delle variabili ha ricondotto l'equazione di Laplace alla risoluzione di queste due equazioni differenziali ordinarie.

Rispetto a (1.4) abbiamo il seguente problema ai limiti

$$\begin{cases}\psi''+\lambda\psi=0 & \text{in } (-\pi,\pi)\\ \psi(-\pi)=\psi(\pi)\\ \psi'(-\pi)=\psi'(\pi)\end{cases}$$

dove queste due condizioni al bordo sono conseguenze delle considerazioni prima fatte sulla periodicità e regolarità.

Distinguiamo i vari casi, alla ricerca di soluzioni NON NULLE.

Per $\lambda=0$ si ha $\psi''(\vartheta)=0$, da cui $\psi(\vartheta)=a\vartheta+b$.

Imponendo le condizioni al bordo

$$\begin{cases}-a\pi+b=a\pi+b\\ a=a\end{cases}$$

da cui $\boxed{a=0}$ si ha pertanto che ~~...~~ $\lambda=0$ è autovalore con autofunzione $\psi_0(\vartheta)=1$.

Per $\lambda < 0$ si ottiene il polinomio caratteristico $\mu^2 + \lambda = 0$ da cui $\mu = \mp\sqrt{-\lambda}$ e la soluzione generale dell'equazione è

~~[illegible]~~

$$\varphi(\vartheta) = a\, e^{-\sqrt{-\lambda}\,\vartheta} + b\, e^{\sqrt{-\lambda}\,\vartheta}$$

che derivata ci dà $\varphi'(\vartheta) = -\sqrt{-\lambda}\, a\, e^{-\sqrt{-\lambda}\,\vartheta} + \sqrt{-\lambda}\, b\, e^{\sqrt{-\lambda}\,\vartheta}$

e imponendo le condizioni iniziali

$$\begin{cases} a\, e^{\pi\sqrt{-\lambda}} + b\, e^{-\pi\sqrt{-\lambda}} = a\, e^{-\sqrt{-\lambda}\,\pi} + b\, e^{\sqrt{-\lambda}\,\pi} \\ -\sqrt{-\lambda}\, a\, e^{\pi\sqrt{-\lambda}} + \sqrt{-\lambda}\, b\, e^{-\sqrt{-\lambda}\,\pi} = -\sqrt{-\lambda}\, a\, e^{-\pi\sqrt{-\lambda}} + \sqrt{-\lambda}\, b\, e^{\sqrt{-\lambda}\,\pi} \end{cases}$$

essendo poi $\sqrt{-\lambda} > 0$ posso dividere la seconda per $\sqrt{-\lambda}$.
Riordinando si ottiene

$$\begin{cases} a\left(e^{\pi\sqrt{-\lambda}} - e^{-\pi\sqrt{-\lambda}}\right) = b\left(e^{\pi\sqrt{-\lambda}} - e^{-\pi\sqrt{-\lambda}}\right) \\ a\left(e^{-\pi\sqrt{-\lambda}} - e^{\pi\sqrt{-\lambda}}\right) = -b\left(e^{-\pi\sqrt{-\lambda}} + e^{+\pi\sqrt{-\lambda}}\right) \end{cases}$$

Tenuto conto che e^t è una funzione strettamente monotona crescente, ~~le quantità~~ le quantità in parentesi (funzioni di λ) sono diverse da zero per ogni $\lambda < 0$.
Pertanto si ottiene

$$\begin{cases} a = b \\ a = -b \end{cases}$$ da cui $a = b = 0$ e non si ottengono soluzioni non nulle.

Per $\lambda > 0$ si ha il polinomio caratteristico $\mu^2 + \lambda = 0$ da cui $\mu = \mp i\sqrt{\lambda}$ e la soluzione generale dell'equazione è

$$\psi(\vartheta) = a\,\mathrm{sen}(\sqrt{\lambda}\,\vartheta) + b\cos(\sqrt{\lambda}\,\vartheta)$$

che derivata ci dà

$$\psi'(\vartheta) = \sqrt{\lambda}\,a\cos(\sqrt{\lambda}\,\vartheta) - b\sqrt{\lambda}\,\mathrm{sen}(\sqrt{\lambda}\,\vartheta)$$

Imponendo le condizioni iniziali otteniamo

$$\begin{cases} -a\,\mathrm{sen}(\sqrt{\lambda}\,\pi) + \cancel{b\cos(\sqrt{\lambda}\,\pi)} = a\,\mathrm{sen}(\sqrt{\lambda}\,\pi) + \cancel{b\cos(\sqrt{\lambda}\,\pi)} \\ \sqrt{\lambda}\,\cancel{a\cos(\sqrt{\lambda}\,\pi)} + b\sqrt{\lambda}\,\mathrm{sen}(\sqrt{\lambda}\,\pi) = \cancel{\sqrt{\lambda}\,a\cos(\sqrt{\lambda}\,\pi)} - b\sqrt{\lambda}\,\mathrm{sen}(\sqrt{\lambda}\,\pi) \end{cases}$$

Poiché $\sqrt{\lambda} > 0$ si può dividere la seconda equazione per $\sqrt{\lambda}$. Riordinando si ha

$$\begin{cases} a\,\mathrm{sen}(\sqrt{\lambda}\,\pi) = 0 \\ b\,\mathrm{sen}(\sqrt{\lambda}\,\pi) = 0 \end{cases}$$

Sono possibili due casi:

i) $a = b = 0$

ii) $\mathrm{sen}(\sqrt{\lambda}\,\pi) = 0 \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$.

se $a = b = 0$ si ottiene la soluzione nulla. ~~Per~~

~~$\sqrt{\lambda}\,\pi = k\pi$, $k \in \mathbb{N}$, $k > 0$~~

~~soluzione $\forall a$, $\forall b$~~.

Nel secondo caso si ~~ha, invece,~~ ha $\sqrt{\lambda}\,\pi = k\pi$, $k \in \mathbb{N}$, $k > 0$.

Risulta $\lambda_k = k^2$. In corrispondenza a tali autovalori abbiamo coppie di autofunzioni date da

$$\psi_k^1 = \mathrm{sen}(k\vartheta), \quad \psi_k^2 = \cos(k\vartheta)$$

In conclusione abbiamo trovato

Per $\lambda=0$ la autofunzione $\psi_0(\vartheta)=1$, sol. gen. $\psi_0(\vartheta)=\hat{a}_0$

Per $\lambda_k=k^2$ le autofunzioni $\psi_k^1(\vartheta)=\operatorname{sen}(k\vartheta)$, $\psi_k^2(\vartheta)=\cos(k\vartheta)$, e la soluzione generale la scriviamo

$$\psi_k(\vartheta)=\hat{a}_k\cos(k\vartheta)+\hat{b}_k\operatorname{sen}(k\vartheta)$$

Passiamo ora alla (1.3).

Per $\lambda=0$ si ottiene

$$\rho^2\varphi''(\rho)+\rho\varphi'(\rho)=0$$

Posto $v(\rho)=\varphi'(\rho)$ si ha (dopo aver diviso per ρ)

$$\rho\, v'(\rho)+v(\rho)=0$$

e, di conseguenza, separando le variabili e integrando:

$$+\frac{v'(\rho)}{v(\rho)}=-\frac{1}{\rho}\ ,\qquad \log\left[\frac{v(\rho)}{c}\right]=-\log(\rho)\ ,\qquad \underline{c \text{ costante}}$$

ovvero

$$v(\rho)=\frac{c}{\rho}$$ e tornando alla φ

$$\varphi(\rho)=+c\log(\rho)+d$$

Sia ora $\lambda_k=k^2$. Si ottiene dalla (1.3)

$$\rho^2\varphi''(\rho)+\rho\varphi'(\rho)-k^2\varphi(\rho)=0,$$

equazione differenziale lineare del II ordine (di tipo Eulero): siamo in grado di scriverne la soluzione generale quando troviamo due soluzioni linearmente indipendenti. Le cerchiamo della forma $\varphi(\rho) = \rho^{\alpha}$. Sostituendo, visto che

$$\varphi'(\rho) = \alpha \rho^{\alpha-1}, \quad \varphi''(\rho) = \alpha(\alpha-1)\rho^{\alpha-2}$$

si ottiene

$$\rho^2 \alpha \cdot (\alpha-1)\rho^{\alpha-2} + \rho \cdot \alpha \cdot \rho^{\alpha-1} - K^2 \rho^{\alpha} = 0$$

e dividendo per ρ^{α} si ha

$$\alpha^2 \cancel{-\alpha} \cancel{+\alpha} - K^2 = 0$$

$$\alpha^2 = K^2 \implies \alpha = \mp K$$

Abbiamo perciò trovato le due soluzioni linearmente indipendenti

$$\varphi^1_K(\rho) = \rho^{-K}, \quad \varphi^2_K(\rho) = \rho^{K}$$

e la soluzione generale è $\varphi_K(\rho) = \tilde{a}_K \rho^{-K} + \tilde{b}_K \rho^{K}$

Abbiamo perciò trovato:

i) per $\lambda = 0$ $\quad \varphi_0(\rho) = \tilde{a}_0 \log(\rho) + \tilde{b}_0$

ii) per $\lambda_K = K^2$ $\quad \varphi_K(\rho) = \tilde{a}_K \rho^{-K} + \tilde{b}_K \rho^{K}$

Poiché cercavamo però soluzioni regolari anche per $\rho = 0$, dobbiamo imporre $\tilde{a}_h = 0 \quad \forall h = 0, 1, 2, \dots$

In conclusione, tenuto conto che combinazione lineare (anche infinita) di soluzioni è ancora soluzione, abbiamo trovato la soluzione generale

$$U(\rho,\vartheta)=\hat{a}_0\,\tilde{b}_0+\sum_{K=1}^{\infty}\tilde{b}_K\,\rho^K\left(\hat{a}_K\cos(K\vartheta)+\hat{b}_K\,\mathrm{sen}(K\vartheta)\right)$$

che, mettendo assieme le costanti, si può scrivere

$$U(\rho,\vartheta)=\frac{a_0}{2}+\sum_{K=1}^{\infty}\left(a_K\cos(K\vartheta)+b_K\,\mathrm{sen}(K\vartheta)\right)\rho^K \qquad (1.5)$$

Resta da imporre il dato al bordo $U(1,\vartheta)=\varphi(\vartheta)$, si ha

$$\varphi(\vartheta)=\frac{a_0}{2}+\sum_{K=1}^{\infty}a_K\cos(K\vartheta)+b_K\,\mathrm{sen}(K\vartheta)$$

da cui si deduce che è la soluzione con

$$a_K=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(\vartheta)\cos(\vartheta K)\,d\vartheta \qquad K\in\mathbb{N},\ K\geq 0$$

$$b_K=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(\vartheta)\,\mathrm{sen}(K\vartheta)\,d\vartheta \qquad K\in\mathbb{N},\ K>0$$

Tornando, infine, alle variabili (x,y) si ha la soluzione del problema di partenza.

$$\cancel{u(x,y)=\frac{a_0}{2}+\sum_{K=1}^{\infty}\left(a_K\cos(K\vartheta)+b_K\,\mathrm{sen}(K\vartheta)\right)\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^K}$$

ESERCIZIO 2 — Calcolare, mediante la teoria dei residui, l'integrale improprio

$$I=\int_0^{\infty}\frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx$$

La funzione integranda è integrabile in senso improprio come si può verificare con i metodi della teoria elementare dell'integrazione. Essendo, inoltre, pari, risulta

$$I=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx .$$

Si ha, poi, $\operatorname{sen} x=\dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$

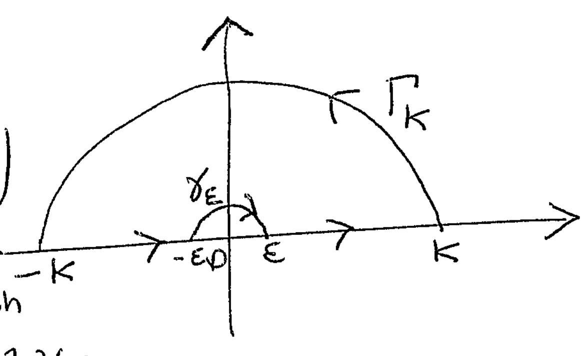
per cui

$$I=\frac{1}{4i}\left(\text{V.p.}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ix}}{x}\,dx-\text{V.p.}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-ix}}{x}\,dx\right)$$

$$=\frac{1}{4i}\left(I_1-I_2\right)$$

La motivazione del V.p. è l'introduzione delle singolarità nell'origine come conseguenza dell'aver spezzato in due integrali.

Sia $f_1(z)=\dfrac{e^{iz}}{z}$. Risulta che f_1 è singolare (polo del 1° ordine) nell'origine e che ad essa si può applicare il lemma di Jordan nel semipiano superiore: l'integrazione di f_1 nella semicirconferenza Γ_K tende a zero per $K\to\infty$,



mentre $\displaystyle\int_{\gamma_\varepsilon} f_1(z)\,dz \xrightarrow{\varepsilon\to 0^+} -\pi i\,\operatorname{Res}(f_1;0)$,

dove il segno meno è conseguenza dell'orientazione oraria di γ_ε.
Per il teorema dei residui risulta d'altra parte

$$0 = \int_{\varepsilon}^{K} f_1(z)\,dz + \int_{\Gamma_K} f_1(z)\,dz + \int_{-K}^{-\varepsilon} f_1(z)\,dz + \int_{\gamma_\varepsilon} f_1(z)\,dz$$

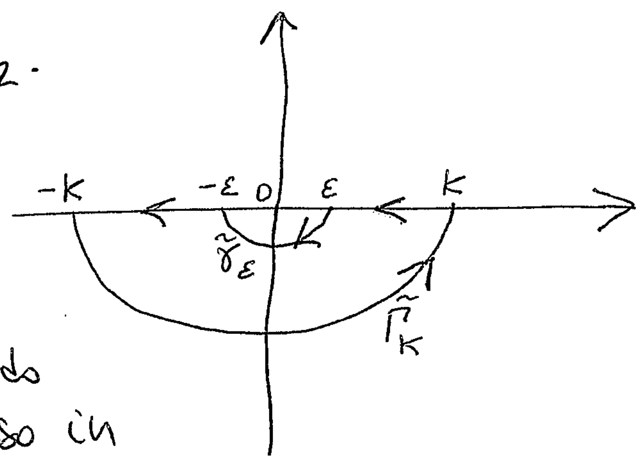
e, dopo il passaggio al limite per $K \to +\infty$ ed $\varepsilon \to 0^+$,

$$\text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iz}}{z}\,dz - \pi i \,\mathrm{Res}(f_1; 0) = 0 ,$$

ovvero

$$I_1 = \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iz}}{z}\,dz = \pi i \, e^0 = \pi i$$

Analogamente procediamo ora per I_2.
Sia $f_2(z) = \dfrac{e^{-iz}}{z}$



Al fine di applicare il lemma di Jordan dobbiamo ora lavorare nel semipiano inferiore. Applicando il teorema dei residui al percorso in figura si ha

$$\int_{\tilde{\Gamma}_K} f_2(z)\,dz + \int_{K}^{\varepsilon} f_2(z)\,dz + \int_{\tilde{\gamma}_\varepsilon} f_2(z)\,dz + \int_{-\varepsilon}^{-K} f_2(z)\,dz = 0 \qquad (2.1)$$

Per il lemma di Jordan

$$\int_{\tilde{\Gamma}_K} f_2(z)\,dz \xrightarrow[K \to +\infty]{} 0$$

mentre risulta ($\tilde{\gamma}_\varepsilon$ è percorsa in senso orario, da cui il segno nel momento dell'integrazione)

$$\int_{\tilde{\gamma}_\varepsilon} f_2(z)\,dz = -\pi i \,\mathrm{Res}(f_2; 0)$$

Passando al limite nella (2.1) si ha $(K \to +\infty,\ \varepsilon \to 0^+)$

$$-\,\mathrm{V.p.}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-iz}}{z}\,dz - \pi i \,\mathrm{Res}(f_2; 0) = 0$$

e, di conseguenza

$$I_2 = \mathrm{V.p.}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-iz}}{z}\,dz = -\pi i\,\mathrm{Res}(f_2; 0) = -\pi i\, e^0 = -\pi i$$

In conclusione

$$I = \frac{1}{4i}(I_1 - I_2) = \frac{1}{4i}(\pi i + \pi i) = \pi/2$$

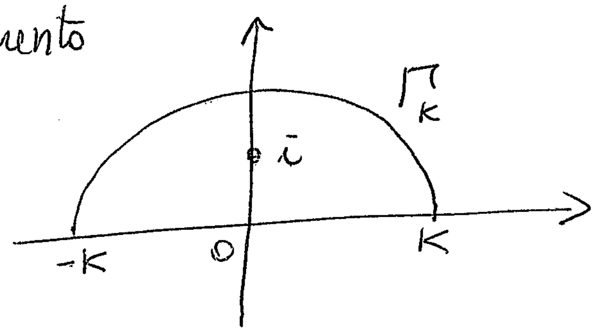
ESERCIZIO 3 — Calcolare, mediante la teoria dei residui, l'integrale improprio

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}^2(x)}{(1+x^2)^2}\, dx$$

Risulta $\operatorname{sen}^2 x = \dfrac{1-\cos(2x)}{2}$, da cui

$$I = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2}\, dx - \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(2x)}{(1+x^2)^2}\, dx = \frac{1}{2}(I_1 - I_2)$$

Per quanto riguarda I_1, detta $f_1(z) = \dfrac{1}{(1+z^2)^2}$, questa ammette poli doppi in $z = \mp i$.
Applichiamo il teorema dei residui ~~alla semicirconferenza~~ al semipiano superiore: in riferimento al percorso in figura, si ha



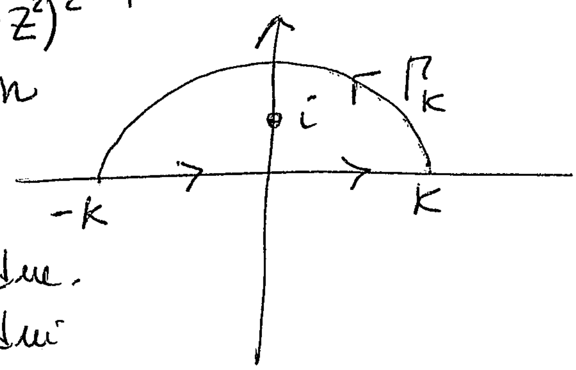
$$\int_{-K}^{K} f_1(z)\, dz + \int_{\Gamma_K} f_1(z)\, dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f_1; i)$$

Poiché il grado del denominatore supera quello del numeratore di due (nel caso specifico quattro), l'integrale curvilineo su Γ_K tende a zero per $K \longrightarrow +\infty$ e si ottiene

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(z)\, dz = 2\pi i \left[\frac{d}{dz} \frac{1 \cdot \cancel{(z-i)^2}}{(z+i)^2 \cancel{(z-i)^2}}\right]_{z=i} =$$

$$= 2\pi i \left[-2(z+i)^{-3}\right]_{z=i} = -4\pi i (2i)^{-3} = \frac{\pi}{2}$$

Passando ad I_2, detta $f_2(z) = \dfrac{e^{iz}}{(1+z^2)^2}$,
posso applicare il lemma di Jordan
nel semipiano superiore.



L'unico polo in tale semipiano
è ancora $z = i$ con molteplicità due.
Utilizzando il teorema dei residui
abbiamo

$$\int_{-K}^{K} f_2(z)\,dz + \int_{\Gamma_K} f_2(z)\,dz = 2\pi i \, \mathrm{Res}(f_2; i)$$

Per il lemma di Jordan si ha $\displaystyle\int_{\Gamma_K} f_2(z)\,dz \xrightarrow[K \to +\infty]{} 0$

e, di conseguenza,

$$I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iz}}{(1+z^2)^2}\,dz = 2\pi i \left[\frac{d}{dz} \frac{e^{iz}\cancel{(z-i)^2}}{(z+i)^2\cancel{(z-i)^2}} \right]_{|z=i} =$$

$$= 2\pi i \left[\frac{i e^{iz}(z+i) - 2e^{iz}}{(z+i)^3} \right]_{|z=i} =$$

$$= 2\pi \cancel{i} \, \frac{i\frac{1}{e}2i - 2\frac{1}{e}}{-8\cancel{i}} = -\frac{\pi}{4}\,\frac{2}{e}(-1-1) = \frac{\pi}{e}$$

In conclusione

$$I = \frac{1}{2}(I_1 - I_2) = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{e}\right) = \frac{\pi(e-2)}{4e}$$

ESERCIZIO 4 – Risolvere l'equazione integrale

$$\mathrm{sen}(2t) = x(t) - \int_0^t x(\tau)\,\mathrm{sen}(t-\tau)\,d\tau$$

mediante trasformata di Laplace.

Risoluzione

Cerchiamo una soluzione Laplace-trasformabile dell'equazione. Indichiamo

$$X(p) = \mathcal{L}[x](p).$$

Ricordiamo poi che

$$\mathcal{L}[\mathrm{sen}\,\alpha t](p) = \frac{\alpha}{p^2+\alpha^2}$$, da cui l'equazione

diviene

$$\frac{2}{p^2+4} = X(p) - \frac{X(p)}{p^2+1},$$

$$X(p)\left(1 - \frac{1}{p^2+1}\right) = \frac{2}{p^2+4}$$ e infine

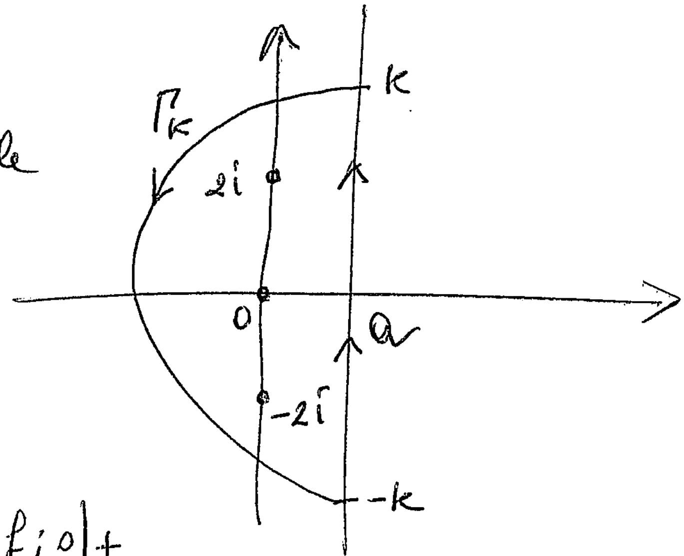
$$X(p) = \frac{2(p^2+1)}{p^2(p^2+4)}$$

e, antitrasformando si ha:

per $t<0$ $x(t) \equiv 0$, mentre per $t \geq 0$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi i}\,\mathrm{V.P.}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt}\,\frac{2(p^2+1)}{p^2(p^2+4)}\,dp,$$

dove $a>0$ in quanto la funzione $X(p)$ è olomorfa per $\mathrm{Re}(p)>0$.



Per il lemma di Jordan l'integrale sulla semicirconferenza Γ_K tende a zero per $K \to +\infty$, per cui, dalla relazione del teorema dei residui

$$\int_{a-Ki}^{a+Ki} f(z)\,dz + \int_{\Gamma_K} f(z)\,dz = 2\pi i\Big[\big(\mathrm{Res}\,f;0\big) + \mathrm{Res}\big(f;-2i\big) + \mathrm{Res}\big(f;2i\big)\Big],$$

si ottiene per $K \longrightarrow +\infty$

$$\frac{1}{2\pi i}\,\mathrm{V.p.}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt}\,\frac{2(p^2+1)}{p^2(p^2+4)}\,dp = \mathrm{Res}(f;0) + \mathrm{Res}(f;-2i) + \mathrm{Res}(f;2i)$$

Risulta

$$\mathrm{Res}(f;0) = 2\left[\frac{d}{dp}\left(e^{pt}\frac{(p^2+1)\cancel{p^2}}{(p^2+4)\cancel{p^2}}\right)\right]_{p=0} = 2\left[\frac{t\,e^{pt}(p^2+1)}{(p^2+4)} + e^{pt}\,\frac{2p(p^2+4)-2p(p^2+1)}{(p^2+4)^2}\right]_{p=0} = \frac{2t}{4} = \frac{t}{2}$$

$$\mathrm{Res}(f;2i) = 2\left[\frac{e^{pt}(p^2+1)\,\cancel{(p-2i)}}{(p+2i)\cancel{(p-2i)}\,p^2}\right]_{p=2i} = 2e^{2it}\,\frac{-3}{4i\cdot(-4)}$$

$$= \frac{3}{8i}\,e^{2it}$$

$$\operatorname{Res}(f; -2i) = 2\left[\frac{e^{pt}(p^2+1)\cancel{(p+2i)}}{(p-2i)\cancel{(p+2i)}\,p^2}\right]_{p=-2i} =$$

$$= 2e^{-2it}\frac{+3}{-4(+4i)} = -\frac{3}{8}e^{-2it}$$

In definitiva

$$x(t) = \frac{t}{2} + \frac{3}{4}\,\frac{e^{2it}-e^{-2it}}{2i} = \frac{t}{2} + \frac{3}{4}\operatorname{sen}(2t)$$

ESERCIZIO 5 – Risolvere, mediante trasformate di Laplace, il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + y = 8\cos(t) \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = -1 \end{cases}$$

Detta $Y(p) = \mathcal{L}[y](p)$ e ricordando che $\mathcal{L}[\cos t] = \frac{p}{p^2+1}$ si ha

$$p^2 Y(p) - p\, y(0) - y'(0) + Y(p) = \frac{8p}{p^2+1}$$

ovvero

$$(1+p^2) Y(p) = p - 1 + \frac{8p}{p^2+1}$$

e dividendo

$$Y(p) = \frac{p-1}{p^2+1} + \frac{8p}{(p^2+1)^2} =$$

$$= \frac{p}{p^2+1} - \frac{1}{p^2+1} - 4\frac{d}{dp}\left(\frac{1}{p^2+1}\right)$$

e antitrasformando (e usando le varie proprietà della trasformata)

$$y(t) = \cos t - \operatorname{sen} t + 4t \operatorname{sen} t$$

che è la soluzione del problema

ESERCIZIO 6 – Risolvere, mediante trasformata di Fourier, l'equazione differenziale

$$y(x) - y'(x) = H(x - x^2)\, e^{-x},$$

dove $H = H(t)$ è la funzione di Heaviside.

Risoluzione

Mediante trasformata di Fourier non saremo in grado di trovare tutte le soluzioni (somma di una soluzione particolare più la soluzione generale dell'omogenea associata), ma solo le soluzioni che stanno in $L^1(\mathbb{R})$.

Risulta intanto

$$x - x^2 \geq 0 \quad \text{per} \quad x \in [0, 1]. \text{ Perciò}$$

$$H(x - x^2) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Trasformando l'equazione con Fourier si ottiene, se $\mathcal{F}[y](\xi) = \hat{y}(\xi)$,

$$\hat{y}(\xi) - 2\pi i \xi\, \hat{y}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x} H(x - x^2)\, e^{-2\pi i x \xi}\, dx =$$

$$= \int_0^1 e^{-x} e^{-2\pi i x \xi}\, dx = \int_0^1 e^{-(2\pi i \xi + 1)x}\, dx =$$

$$= -\frac{1}{1 + 2\pi i \xi}\left(e^{-2\pi i \xi + 1} - 1\right)$$

da cui

$$\hat{y}(\xi) = \frac{1 - \frac{1}{e} e^{-2\pi i \xi}}{(1+2\pi i \xi)(1-2\pi i \xi)} = \frac{1}{1+4\pi^2 \xi^2} + $$

$$- \frac{1}{e} \frac{e^{-2\pi i \xi}}{1+4\pi^2 \xi^2}$$

Antitrasformando si ottiene

$$y(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|} - \frac{1}{2e} e^{-|x-1|}$$

alla quale si perviene utilizzando il risultato ottenuto in precedenza

$$\mathcal{F}\left(e^{-|x|}\right) = \frac{2}{1+4\pi^2\xi^2}$$ e la proprietà di traslazione.

La soluzione, si osservi, è continua ma non è derivabile in $x=0$ e $x=1$ (conseguenza della discontinuità di $H(x-x^2)$).

La soluzione $y \in L^1(\mathbb{R})$ come anticipato.

ESERCIZIO 7 – Sia data la funzione 2π-periodica definita da

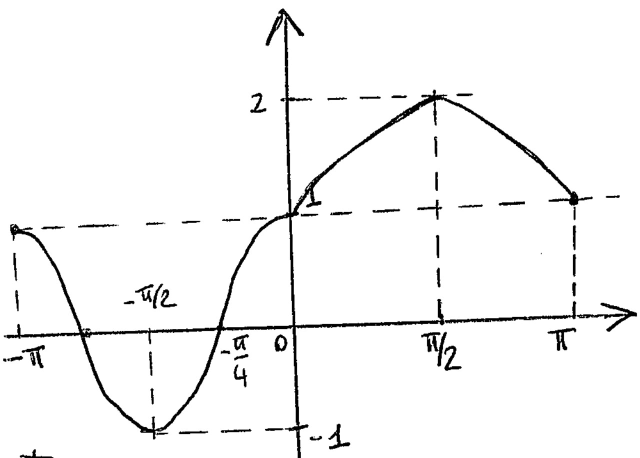
$$f(x) = \begin{cases} \cos(2x) & \text{per } -\pi \leq x \leq 0 \\ 1 + \operatorname{sen}(x) & \text{per } 0 < x < \pi . \end{cases}$$

a) Disegnare la funzione

b) Determinare i coefficienti di Fourier di tale funzione

c) Studiare le proprietà di convergenza puntuale della serie di Fourier associata.

Risoluzione



La funzione è continua su tutto $\mathbb{R}$ (anche agli estremi dell'intervallo di periodicità $(-\pi, \pi]$). Si osservi, però, che $f \notin C^1(\mathbb{R})$ in quanto nei punti $x_k = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ la derivata non esiste (ma esistono le derivate destra e sinistra finite).

In base alle osservazioni fatte siamo in grado di rispondere subito alla terza domanda: essendo verificate tutte le ipotesi del Teorema di Dini di convergenza puntuale, la serie di Fourier associata converge puntualmente al valore della funzione nel punto considerato (visto che f è continua la media del limite destro e sinistro coincide con il valore assunto).

Per completare l'esercizio calcoliamo i coefficienti di Fourier.

Si ha

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \operatorname{sen}(kx)$$

dove

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx)\, dx \quad , \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen}(kx)\, dx$$

Risulta

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} \cos(2x)\cos(kx)\, dx + \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} (1+\operatorname{sen} x)\cos(kx)\, dx \, ,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} \cos(2x) \operatorname{sen}(kx)\, dx + \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} (1+\operatorname{sen} x) \operatorname{sen}(kx)\, dx .$$

Calcoliamo i vari integrali indefiniti necessari per determinare i valori a_k e b_k. Per brevità non riporterò la costante (arbitraria) di integrazione.

(I) $$\int \cos(2x)\cos(kx)\, dx = \frac{1}{2} \operatorname{sen}(2x)\cos(kx) - \int \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2x)(-k)\operatorname{sen}(kx)\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2x)\cos(kx) + \frac{k}{2}\left(-\frac{\cos(2x)}{2}\operatorname{sen}(kx) - \int -\frac{\cos(2x)}{2} k \cos(kx)\, dx \right)$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2x)\cos(kx) - \frac{k}{4}\cos(2x)\operatorname{sen}(kx) + \frac{k^2}{4}\int \cos(2x)\cos(kx)\, dx$$

Per $k \neq 2$ si ha, allora,

$$\int \cos(2x)\cos(kx)\, dx = \frac{1}{1-\frac{k^2}{4}}\left(\frac{1}{2}\operatorname{sen}(2x)\cos(kx) - \frac{k}{4}\cos(2x)\operatorname{sen}(kx) \right)$$

(II) $$\int \cos(kx)\, dx = \frac{1}{k}\operatorname{sen}(kx)$$

III $$\int \operatorname{sen}(x)\cos(kx)\,dx = -\cos x \cos(kx) - \int +\cos(x)\, k \operatorname{sen}(kx)\,dx$$

$$= -\cos(x)\cos(kx) - \operatorname{sen}(x)\, k \operatorname{sen}(kx) + k\int \operatorname{sen}(x)\, k\cos(kx)\,dx$$

da cui, se $k \neq 1$

$$\int \operatorname{sen}(x)\cos(kx)\,dx = \frac{1}{1-k}\left(-\cos x \cos kx - \cancel{k}\operatorname{sen} x \operatorname{sen} kx\right)$$

$$= \frac{1}{k-1}\left(k \operatorname{sen} x \operatorname{sen}(kx) + \cos x \cos kx\right)$$

IV $$\int \cos(2x)\operatorname{sen}(kx)\,dx = \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2x)\operatorname{sen}(kx) - \int \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2x)\, k\cos(kx)\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2x)\operatorname{sen}(kx) - \frac{k}{2}\left(-\frac{1}{2}\cos(2x)\cos(kx) - \int -\frac{1}{2}\cos(2x)(-k)\operatorname{sen}(kx)\,dx\right)$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2x)\operatorname{sen}(kx) + \frac{k}{4}\cos(2x)\cos(kx) + \frac{k^2}{4}\int \cos(2x)\operatorname{sen}(kx)\,dx$$

da cui, se $k \neq 2$,

$$\int \cos(2x)\operatorname{sen}(kx)\,dx = \frac{1}{1-\frac{k^2}{4}}\left(\frac{1}{2}\operatorname{sen}(2x)\operatorname{sen}(kx) + \frac{k}{4}\cos(2x)\cos(kx)\right)$$

V $$\int \operatorname{sen}(kx)\,dx = -\frac{1}{k}\cos(kx)$$

VI $$\int \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(kx)\,dx = -\cos(x)\operatorname{sen}(kx) - \int -\cos(x)\, k\cos(kx)\,dx =$$

$$= -\cos(x)\operatorname{sen}(kx) + k\left(\operatorname{sen}(x)\cos(kx) - \int \operatorname{sen}(x)(-k)\operatorname{sen}(kx)\,dx\right)$$

da cui, se $k \neq 1$,

$$\int \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(kx)\,dx = \frac{1}{1-k^2}\left(-\cos(x)\operatorname{sen}(kx) + k \operatorname{sen} x \cos(kx)\right)$$

Restano da esaminare i casi di $k=1$ e $k=2$ prima tralasciati.

(I') Per $k=2$, dopo la prima integrazione per parti si ha

$$\int \cos^2(2x)\,dx = \frac{1}{2}\,\text{sen}(2x)\cos(2x) + \int \text{sen}^2(2x)\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\,\text{sen}(2x)\cos(2x) + x - \int \cos^2(2x)\,dx$$

da cui

$$\int \cos^2(2x)\,dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\,\text{sen}(2x)\cos(2x)$$

(III') Per $k=1$, si ha

$$\int \text{sen}\,x \cos x\,dx = \frac{1}{2}\,\text{sen}^2(x)$$

(IV') Per $k=2$ si ha

$$\int \cos(2x)\,\text{sen}(2x)\,dx = \frac{1}{4}\,\text{sen}^2(2x)$$

(VI') Per $k=1$ si ha, dopo la prima integrazione per parti

$$\int \text{sen}^2(x)\,dx = -\cos(x)\,\text{sen}(x) + \int \cos^2(x)\,dx$$
$$= -\cos(x)\,\text{sen}(x) + x - \int \text{sen}^2 x\,dx$$

da cui

$$\int \text{sen}^2 x\,dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\,\text{sen}(x)\cos(x)$$

Passiamo però al calcolo dei coefficienti

$$a_1 = \frac{1}{3/4\,\pi}\left(\frac{1}{2}\operatorname{sen}(2x)\cos x - \frac{1}{4}\cos 2x \operatorname{sen} x\right)\Bigg|_{x=-\pi}^{x=0} +$$

$$+\frac{1}{\pi}\operatorname{sen} x\Bigg|_{x=0}^{x=\pi} + \frac{1}{\pi}\frac{1}{2}\operatorname{sen}^2(x)\Bigg|_{x=0}^{x=\pi} = 0$$

$$a_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\frac{1}{2}\operatorname{sen}(2x)\Bigg|_{x=0}^{x=\pi} + \frac{1}{\pi}\left(2\operatorname{sen} x\operatorname{sen}(2x) + \cos x\cos(2x)\right)\Bigg|_{x=0}^{x=\pi}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\left(-1-1\right) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}$$

$$b_1 = \frac{1}{\pi}\frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}\operatorname{sen}(2x)\operatorname{sen} x + \frac{1}{4}\cos(2x)\cos(x)\right)\Bigg|_{x=-\pi}^{x=0}$$

$$+\frac{1}{\pi}(-1)\cos x\Bigg|_{x=0}^{x=\pi} + \frac{1}{\pi}\frac{\pi}{2} =$$

$$= \frac{4}{3\pi}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right) - \frac{1}{\pi}\left(-1-1\right) + \frac{1}{2} = \frac{4}{3\pi}\cdot\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} + \frac{1}{2} =$$

$$= \frac{2}{3\pi} + \frac{2}{\pi} + \frac{1}{2}$$

$$b_2 = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}\operatorname{sen}^2(2x) + \frac{1}{2}\cos^2(2x)\right)\Bigg|_{x=-\pi}^{x=0} + \frac{1}{\pi}\left(-\frac{1}{2}\right)\cos(2x)\Bigg|_{x=-\pi}^{x=0} +$$

$$+\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{-3}\right)\left(-\cos(x)\operatorname{sen}(2x) + 2\operatorname{sen} x\cos(2x)\right)\Bigg|_{x=0}^{x=\pi} = 0$$

Per $k \neq 1, 2$ si ottiene

$$a_k = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{1-\frac{k^2}{4}}\right)\left(\frac{1}{2}\operatorname{sen}(2x)\cos(kx) - \frac{k}{4}\cos(2x)\operatorname{sen}(kx)\right)\Bigg|_{x=-\pi}^{x=0} +$$

$$+\frac{1}{\pi}\frac{1}{k-1}\left(k \operatorname{sen} x \operatorname{sen}(kx)+\cos x \cos(kx)\right)\Big|_0^{\pi}+$$

$$+\frac{1}{\pi}\frac{1}{k}\operatorname{sen}(kx)\Big|_0^{\pi}=\frac{1}{\pi}\frac{1}{k-1}\left(-\cos(k\pi)-1\right)$$

$$=\frac{1}{\pi}\frac{-(-1)^k-1}{k-1}$$

$$b_k=\frac{1}{\pi}\frac{1}{1-\frac{k^2}{4}}\left(\frac{1}{2}\operatorname{sen}(2x)\operatorname{sen}(kx)+\frac{k}{4}\cos(2x)\cos(kx)\right)\Big|_{x=-\pi}^{x=0}+$$

$$+\frac{1}{\pi}\left(-\frac{1}{k}\right)\cos(kx)\Big|_{x=0}^{x=\pi}+\frac{1}{\pi}\frac{1}{1-k^2}\left(-\cos x \operatorname{sen}(kx)+k\operatorname{sen}(x)\cdot\right.$$

$$\left.\cos(kx)\right)\Big|_{x=0}^{x=\pi}=\frac{1}{\pi}\frac{1}{1-\frac{k^2}{4}}\frac{k}{4}\left(1-\cos(k\pi)\right)+$$

$$-\frac{1}{\pi k}\left(\cos(k\pi)-1\right)=$$

$$=\frac{1}{4\pi}\frac{k}{1-\frac{k^2}{4}}\left(1-(-1)^k\right)+\frac{1}{k\pi}\left(1-(-1)^k\right)$$

$$=\left(1-(-1)^k\right)\left(\frac{k}{\pi(4-k^2)}+\frac{1}{\pi k}\right)=$$

$$=\left(1-(-1)^k\right)\frac{\cancel{k^2}+4-\cancel{k^2}}{\pi k(4-k^2)}=4\left(1-(-1)^k\right)\frac{1}{\pi k(4-k^2)}$$

In particolare

$$a_0=\frac{1}{\pi}\frac{-1-1}{-1}=\frac{2}{\pi}$$

Si ha, quindi $f(x)=\frac{1}{\pi}+\left(\frac{2}{3\pi}+\frac{2}{\pi}+\frac{1}{2}\right)\operatorname{sen} x+$

$$+\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\right)\cos(2x)+\sum_{k=3}^{\infty}\left(-\frac{1}{\pi}\frac{(-1)^k+1}{k-1}\cos(kx)+\right.$$

$$\left.+4\left(1-(-1)^k\right)\frac{1}{\pi k(4-k^2)}\operatorname{sen}(kx)\right)$$

ESERCIZIO 8 – Mediante l'uso della separazione delle variabili, risolvere il seguente problema

$$\begin{cases} u_{tt} - 2u_{xx} = 0 & 0<x<6, \ t\in\mathbb{R} \\ u(x,0) = f(x) & 0<x<6 \\ u_t(x,0) = 0 & 0<x<6 \\ u_x(0,t) = u_x(6,t) = 0, & t\in\mathbb{R} \end{cases}$$

dove

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } 0\le x\le 3 \\ 12-2x & \text{se } 3<x\le 6 \end{cases}$$

Risoluzione

Si tratta del problema di Cauchy-Neumann per l'equazione delle onde.

Sia $u(x,t) = \varphi(x)\psi(t)$. Sostituendo nell'equazione si ha

$$\varphi(x)\psi''(t) - 2\varphi''(x)\psi(t) = 0$$

e dividendo per $\varphi(x)\psi(t)$ otteniamo

$$\frac{\psi''(t)}{\psi(t)} = 2\frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)} = 2\lambda$$

da cui le due equazioni differenziali

$$\begin{cases} \psi''(t) = 2\lambda\psi(t) \\ \varphi''(x) = \lambda\varphi(x) \end{cases}$$

Sostituendo poi nel dato al bordo si ha

$\varphi'(0)\psi(t) = \varphi'(6)\psi(t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$, da cui

$\varphi'(0) = \varphi'(6) = 0$.

Risolviamo per prima cosa il problema ai limiti

$$\begin{cases} \varphi''(x) = \lambda\varphi(x) \\ \varphi'(0) = \varphi'(6) = 0 \end{cases}$$

Distinguiamo i vari casi

Per $\lambda = 0$, da $\varphi''(x) = 0$ si ottiene che $\forall a, b \in \mathbb{R}$

$\varphi(x) = ax + b$ e, imponendo le condizioni al bordo,

dato che $\varphi'(x) = a$, si ottiene

$\boxed{a = 0}$

Perciò $\lambda = 0$ è un autovalore con autofunzione $\tilde{\varphi}_0(x) = 1$,

per cui sono soluzione ~~generale~~ $\varphi_0(x) = \hat{b}_0$ per ogni $\hat{b}_0 \in \mathbb{R}$.

Per $\lambda < 0$ il polinomio caratteristico è

$\mu^2 = \lambda$, da cui $\mu = \mp i\sqrt{-\lambda}$ e la soluzione generale è

$\varphi(x) = a\cos(\sqrt{-\lambda}\,x) + b\,\mathrm{sen}(\sqrt{-\lambda}\,x)$ e derivando

$\varphi'(x) = -\sqrt{-\lambda}\,a\,\mathrm{sen}(\sqrt{-\lambda}\,x) + b\sqrt{-\lambda}\cos(\sqrt{-\lambda}\,x)$

Imponendo le condizioni al bordo

$$\begin{cases} -\sqrt{-\lambda}\,a\,\mathrm{sen}(\sqrt{-\lambda}\cdot 6) + b\sqrt{-\lambda}\cos(\sqrt{-\lambda}\cdot 6) = 0 \\ b\sqrt{-\lambda} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = 0 \\ a\,\mathrm{sen}(6\sqrt{-\lambda}) = 0 \end{cases}$$

le cui due soluzioni sono

$$\begin{cases} b=0 \\ a=0 \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} b=0 \\ 6\sqrt{-\lambda}=k\pi \end{cases} \quad \forall k \in \mathbb{N},\ k>0.$$

Abbiamo perciò soluzioni non nulle per

$\sqrt{-\lambda} = k\frac{\pi}{6}$ ovvero per $\lambda_k = -k^2\frac{\pi^2}{36}$

in corrispondenza alle quali (autovalori) si hanno

le autofunzioni $\tilde{\varphi}_k(x) = \operatorname{sen}\left(k\frac{\pi}{6}x\right)$

Perciò per $\lambda_k = -k^2\frac{\pi^2}{36}$ sono soluzione

$$\varphi_k(x) = \hat{b}_k \operatorname{sen}\left(k\frac{\pi}{6}x\right)$$

Infine, sia $\lambda > 0$. Il polinomio caratteristico $\mu^2 = \lambda$

ha soluzioni $\mu = \mp\sqrt{\lambda}$ e la soluzione generale

dell'equazione è

$$\varphi(x) = a\,e^{-\sqrt{\lambda}x} + b\,e^{\sqrt{\lambda}x} \quad \text{e derivando}$$

$$\varphi'(x) = -\sqrt{\lambda}\,a\,e^{-\sqrt{\lambda}x} + b\sqrt{\lambda}\,e^{\sqrt{\lambda}x}$$

Imponendo le condizioni al bordo

$$\begin{cases} -\sqrt{\lambda}\,a + \sqrt{\lambda}\,b = 0 \\ -\sqrt{\lambda}\,a\,e^{-6\sqrt{\lambda}} + \sqrt{\lambda}\,b\,e^{6\sqrt{\lambda}} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} b = a \\ a\left(e^{6\sqrt{\lambda}} - e^{-6\sqrt{\lambda}}\right) = 0 \end{cases}$$

Poiché e^t è strettamente monotona, $e^{6\sqrt{\lambda}} \neq e^{-6\sqrt{\lambda}}$ e

di conseguenza $a=b=0$ e non vi sono autovalori.

Passando all'equazione $\varphi'' = 2\lambda\varphi$ si ha:

Per $\lambda = 0$ $\varphi''(t) = 0$, da cui $\varphi_0(t) = \tilde{a}_0 t + \tilde{b}_0$

Per $\lambda_k = -k^2\frac{\pi^2}{36}$ il polinomio caratteristico è

$\mu^2 = -2k^2\frac{\pi^2}{36}$, da cui $\mu = \pm i k\frac{\pi}{6}\sqrt{2}$ e la soluzione generale è

$$\varphi_k(t) = \tilde{a}_k \cos\left(k\frac{\pi}{6}\sqrt{2}\,t\right) + \tilde{b}_k \operatorname{sen}\left(k\frac{\pi}{6}\sqrt{2}\,t\right)$$

In definitiva abbiamo trovato (visto che combinazione lineare, anche infinita, di soluzioni è soluzione) che

$$u(x,t) = \hat{b}_0\left(\tilde{a}_0 t + \tilde{b}_0\right) + \sum_{k=1}^{\infty} \hat{b}_k \operatorname{sen}\left(k\frac{\pi}{6}x\right)\left(\tilde{a}_k \cos\left(k\frac{\pi}{6}\sqrt{2}\,t\right) + \tilde{b}_k \operatorname{sen}\left(k\frac{\pi}{6}\sqrt{2}\,t\right)\right)$$

Moltiplicando e ridenominando le costanti si ottiene:

$$u(x,t) = a_0 t + b_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos\left(k\frac{\pi}{6}\sqrt{2}\,t\right) + b_k \operatorname{sen}\left(k\frac{\pi}{6}\sqrt{2}\,t\right)\right)\operatorname{sen}\left(k\frac{\pi}{6}x\right)$$

Rimane da imporre le condizioni iniziali.

Derivando in t si ha:

$$u_t(x,t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(-k\frac{\pi}{6}\sqrt{2}\,a_k \operatorname{sen}\left(k\frac{\pi}{6}\sqrt{2}\,t\right) + k\frac{\pi}{6}\sqrt{2}\,b_k \cos\left(k\frac{\pi}{6}\sqrt{2}\,t\right)\right)\cdot \operatorname{sen}\left(k\frac{\pi}{6}x\right)$$

e imponendo le condizioni iniziali si ottiene

$$\begin{cases} b_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \operatorname{sen}\left(k\frac{\pi}{6}x\right) = f(x) \\ a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} k\frac{\pi}{6}\sqrt{2}\, b_k \operatorname{sen}\left(k\frac{\pi}{6}x\right) = 0 \end{cases}$$

Dalla seconda otteniamo, però,

$a_0 = 0$, $b_k = 0 \quad \forall k \geq 1$.

La prima è compatibile con una ~~[illegible]~~ estensione dispari e periodica di periodo 12:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \operatorname{sen}\left(k\frac{\pi}{6}x\right)$$

dove

$$\beta_k = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} f(x) \operatorname{sen}\left(k\frac{2\pi}{T}x\right)dx = \frac{1}{6}\int_0^6 f(x)\operatorname{sen}\left(k\frac{\pi}{6}x\right)dx =$$

$$= \frac{1}{6}\int_0^3 2x \operatorname{sen}\left(k\frac{\pi}{6}x\right)dx + \frac{1}{6}\int_3^6 (12-2x)\operatorname{sen}\left(k\frac{\pi}{6}x\right)dx$$

$$= \frac{1}{3}\left[x \operatorname{sen}\left(k\frac{\pi}{6}x\right)\Big|_{x=0}^{x=3} + \int_0^3 \frac{1}{k\frac{\pi}{6}}\cos\left(k\frac{\pi}{6}x\right)dx \right] +$$

$$+2\int_3^6 \operatorname{sen}\left(k\frac{\pi}{6}x\right)dx - \frac{1}{3}\left[x\operatorname{sen}\left(k\frac{\pi}{6}x\right)\Big|_{x=3}^{x=6} + \int_3^6 \frac{1}{k\frac{\pi}{6}}\cos\left(k\frac{\pi}{6}x\right)dx\right] =$$

$$= \operatorname{sen}\left(k\frac{\pi}{2}\right) + \frac{2}{k\pi}\int_0^3 \cos\left(k\frac{\pi}{6}x\right)dx +$$

$$+2\int_3^6 \operatorname{sen}\left(k\frac{\pi}{6}x\right)dx + \operatorname{sen}\left(k\frac{\pi}{2}\right) - \frac{2}{k\pi}\int_3^6 \cos\left(k\frac{\pi}{6}x\right)dx =$$

$$= 2\operatorname{sen}\left(k\frac{\pi}{2}\right) + \frac{2}{k\pi}\frac{1}{k\pi/6}\operatorname{sen}\left(k\frac{\pi}{6}x\right)\Big|_{x=0}^{k=3} +$$

$$+2\left(-\frac{1}{k\pi/6}\right)\cos\left(k\frac{\pi}{6}x\right)\Bigg|_{x=3}^{x=6}-\frac{2}{k\pi}\frac{1}{k\frac{\pi}{6}}\operatorname{sen}\left(k\frac{\pi}{6}x\right)\Bigg|_{x=3}^{x=6}=$$

$$=2\operatorname{sen}\left(k\frac{\pi}{2}\right)+\frac{12}{k^2\pi^2}\operatorname{sen}\left(k\frac{\pi}{2}\right)-\frac{12}{k\pi}\cos(k\pi)+$$

$$+\frac{12}{k\pi}\cos\left(k\frac{\pi}{2}\right)+\frac{12}{k^2\pi^2}\operatorname{sen}\left(k\frac{\pi}{2}\right)=$$

$$=\operatorname{sen}\left(k\frac{\pi}{2}\right)\left(2+\frac{24}{k^2\pi^2}\right)-\frac{12}{k\pi}\cos(k\pi)+\frac{12}{k\pi}\cos\left(k\frac{\pi}{2}\right)$$

Otteniamo, perciò

$$b_0=0,\quad a_k=\left(2+\frac{24}{k^2\pi^2}\right)\operatorname{sen}\left(k\frac{\pi}{2}\right)-\frac{12}{k\pi}\cos(k\pi)+\frac{12}{k\pi}\cos\left(k\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\forall k\geq 1.$$

La soluzione è data, perciò, da

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos\left(k\frac{\pi}{6}\sqrt{2}\,t\right)\operatorname{sen}\left(k\frac{\pi}{6}x\right),\quad \text{dove}$$

$$a_k=\begin{cases}-\frac{3}{n\pi}+\frac{3}{n\pi}=0 & \text{per } k=4n\\ 2+\frac{24}{(4n+1)^2\pi^2}+\frac{12}{(4n+1)\pi} & \text{per } k=4n+1\\ 2-\frac{6}{(2n+1)\pi}-\frac{6}{(2n+1)\pi} & \text{per } k=4n+2\\ -2-\frac{24}{(4n+3)^2\pi^2}+\frac{12}{(4n+3)\pi} & \text{per } k=4n+3\end{cases}$$

ESERCIZIO 9 — Mediante il metodo di separazione di variabili, risolvere il seguente problema

$$\begin{cases} u_t - 9 u_{xx} = 0 & 0 < x < \pi, \ t > 0 \\ u(x,0) = x^2 & 0 < x < \pi \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 & t > 0 \end{cases}$$

Risoluzione

Si tratta di un ~~equazione~~ problema di Cauchy-Dirichlet per l'equazione del calore.
Cerchiamone una soluzione per separazione di variabili.
Sia $u(x,t) = \varphi(x)\psi(t)$. Sostituendo nell'equazione del calore si ha

$$\varphi(x)\psi'(t) - 9\varphi''(x)\psi(t) = 0$$

e dividendo per $\varphi(x)\psi(t)$

$$\frac{\psi'(t)}{\psi(t)} = 9\frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)} = 9\lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

dalla quale si ricavano le due equazioni

$$\psi'(t) = 9\lambda\psi(t) \qquad (9.1)$$

$$\varphi''(x) = \lambda\varphi(x) \qquad (9.2)$$

mentre sostituendo nel dato di Dirichlet si ottiene

$$\varphi(0)\psi(t) = \varphi(\pi)\psi(t) = 0 \quad \forall t > 0,$$

da cui

$$\varphi(0) = \varphi(\pi) = 0. \qquad (9.3)$$

Otteniamo perciò il problema ai limiti unione della (9.2)-(9.3)

$$\begin{cases} \varphi''(x) = \lambda\, \varphi(x) \\ \varphi(0) = \varphi(\pi) = 0 \end{cases}$$

Per $\lambda = 0$ si ha $\varphi''(x) = 0$, la cui soluzione generale è

$\varphi(x) = ax + b$ e imponendo le condizioni al bordo

$$\begin{cases} b = 0 \\ a\pi + b = 0 \end{cases}$$

da cui $a = b = 0$. Di conseguenza $\lambda = 0$ non è autovalore.

Per $\lambda > 0$ il polinomio caratteristico è $\mu^2 = \lambda$, da cui $\mu = \mp\sqrt{\lambda}$ e la soluzione generale

$\varphi(x) = a e^{-\sqrt{\lambda}\, x} + b e^{\sqrt{\lambda}\, x}$ e imponendo le condizioni al bordo si ha

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ a e^{-\pi\sqrt{\lambda}} + b e^{\pi\sqrt{\lambda}} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} b = -a \\ a\left(e^{-\pi\sqrt{\lambda}} - e^{\pi\sqrt{\lambda}}\right) = 0 \end{cases}$$

Poichè e^t è un ~~esponente~~ strettamente monotona crescente si ha $e^{-\pi\sqrt{\lambda}} \neq e^{\pi\sqrt{\lambda}}$ $\forall \lambda > 0$ per cui $a = b = 0$.

Di conseguenza non vi sono autovalori ~~per~~ $\lambda > 0$.

Sia, infine, $\lambda < 0$. Il polinomio caratteristico $\mu^2 = \lambda$ ammette radici $\lambda = \mp i\sqrt{-\lambda}$ e la soluzione generale è data da

$$\varphi(x) = a \operatorname{sen}(\sqrt{-\lambda}\, x) + b \cos(\sqrt{-\lambda}\, x)$$

Imponendo le condizioni iniziali si ha

$$\begin{cases} b = 0 \\ a \operatorname{sen}(\sqrt{-\lambda}\, \pi) + b \cos(\sqrt{-\lambda}\, \pi) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = 0 \\ a \operatorname{sen}(\sqrt{-\lambda}\, \pi) = 0 \end{cases}$$ le cui soluzioni sono date da

$$\begin{cases} b = 0 \\ a = 0 \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} b = 0 \\ \operatorname{sen}(\sqrt{-\lambda}\, \pi) = 0 . \end{cases}$$

Nel primo caso non vi sono soluzioni non nulle, nel secondo caso, ovvero per $\sqrt{-\lambda}\, \pi = k\pi$, $k \in \mathbb{N}$, $k > 0$, si ha $\lambda_k = -k^2$ e in corrispondenza ~~la soluz~~ l'autofunzione $\tilde{\varphi}_k(x) = \operatorname{sen}(kx)$

Pertanto, in corrispondenza agli autovalori $\lambda_k = -k^2$ $(k \in \mathbb{N}, k \geq 1)$ tutte le soluzioni sono date da

$$\varphi_k(x) = \tilde{b}_k \operatorname{sen}(kx),$$

Passando poi alla (9.1) si ha $\psi'(t) = -9k^2 \psi(t)$, la cui soluzione generale è data da

$$\psi_k(t) = \hat{b}_k e^{-9k^2 t}$$

Abbiamo allora ottenuto, componendo linearmente le soluzioni trovate,

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{b}_k \hat{b}_k e^{-9k^2t} \operatorname{sen}(kx)$$

e, ridenominando la costante,

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k e^{-9k^2t} \operatorname{sen}(kx),$$

Imponendo ora il dato di Cauchy si ottiene

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \operatorname{sen}(kx) = x^2$$

Pertanto $f(x) = x^2$, definita in $[0,\pi]$, va prolungata dispari a $[-\pi,\pi]$.
Risulta, dunque,

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen}(kx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x) \operatorname{sen}(kx)\,dx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 \operatorname{sen}(kx)\,dx.$$

Si tratta di calcolare per prima cosa l'integrale indefinito

$$\int x^2 \operatorname{sen}(kx)\,dx = -\frac{1}{k}\cos(kx)\,x^2 + \frac{2}{k}\int \cos(kx)\,x\,dx =$$

$$= -\frac{x^2}{k}\cos(xk) + \frac{2}{k^2}\operatorname{sen}(kx)\,x - \frac{2}{k^2}\int \operatorname{sen}(kx)\,dx =$$

$$= -\frac{x^2}{k}\cos(kx) + \frac{2x}{k^2}\operatorname{sen}(kx) + \frac{2}{k^3}\cos(kx) + \text{costante}$$

da cui

$$b_K = \frac{2}{\pi}\left(\frac{x^2}{K}\cos(kx) + \frac{2x}{K^2}\operatorname{sen}(kx) + \frac{2}{K^3}\cos(kx)\right)\Bigg|_{x=0}^{x=\pi} =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{K}(-1)^K + \frac{2}{k^3}(-1)^K - \frac{2}{K^3}\right)$$

Abbiamo perciò trovato

$$b_K = \begin{cases} \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{2n} + \cancel{\frac{2}{8n^3}} - \cancel{\frac{2}{8n^3}}\right) = \frac{\pi}{n} & \text{per } K = 2n \\ \frac{2}{\pi}\left(\frac{-\pi^2}{2n+1} - \frac{2}{(2n+1)^3} - \frac{2}{(2n+1)^3}\right) & \text{per } K = 2n+1 \end{cases}$$

ovvero

$$b_K = \begin{cases} \frac{\pi}{n} & \text{per } K = 2n \\ -\frac{2\pi}{2n+1} - \frac{8}{\pi(2n+1)^3} & \text{per } K = 2n+1 \end{cases}$$

La soluzione è, dunque

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{n} e^{-36n^2t}\operatorname{sen}(2nx) - \left(\frac{2\pi}{2n+1} + \frac{8}{\pi(2n+1)}\right) e^{-9(2n+1)^2t}\operatorname{sen}((2n+1)x)$$