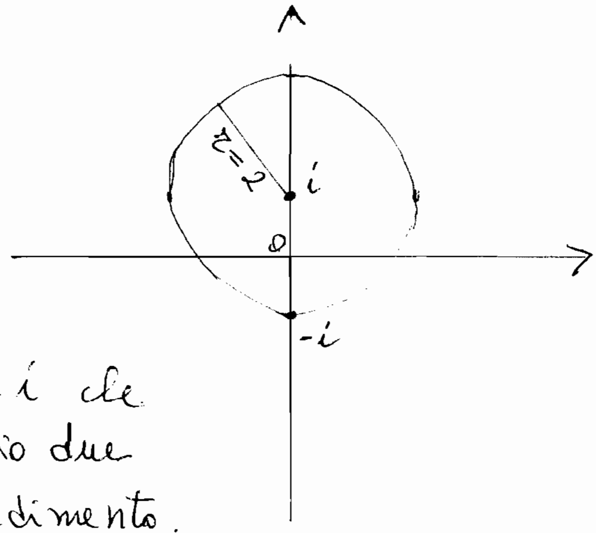
ESERCIZIO 1 della prova scritta di ANALISI MAT. III del 9/1/06

Determinare lo sviluppo in serie di Laurent della funzione

$$f(z) = \frac{z}{z^2+1}$$

nell'insieme $D = \{ z \in \mathbb{C} : 0 < |z-i| < 2 \}$.

RISOLUZIONE



La funzione f è una funzione razionale con denominatore che si annulla di ordine uno nei punti $z = \mp i$.

La serie di Laurent centrata in $z_0 = i$ che converge nel cerchio bucato di raggio due può essere trovata con il seguente procedimento.

Risulta

$$f(z) = \frac{Res(f;-i)}{z+i} + \frac{Res(f;i)}{z-i}$$

e, poiché

$$Res(f;-i) = \frac{-i}{-2i} = \frac{1}{2}, \quad Res(f;i) = \frac{i}{2i} = \frac{1}{2}$$

per cui

$$f(z) = \frac{1}{2}\,\frac{1}{z+i} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{z-i}$$

La seconda è già scritta nella forma richiesta.

Inoltre

$$\frac{1}{z+i} = \frac{1}{(z-i)+2i} = \frac{1}{2i}\,\frac{1}{1+\frac{z-i}{2i}} = \frac{1}{2i}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{z-i}{2i}\right)^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{(2i)^{k+1}}(z-i)^k \quad \text{per } \left|\frac{z-i}{2i}\right| < 1, \text{ cioè } |z-i| < 2.$$

Abbiamo, perciò,

$$f(z) = \frac{1}{2}\,\frac{1}{z-i} + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{2^{k+2}\, i^{-k+1}} (z-i)^k =$$

$$= \sum_{k=-1}^{\infty} a_k (z-i)^k ,$$

dove

$$a_k = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{per } k=-1 \\ (-1)^k \frac{1}{2^{k+2}\, i^{-k+1}} & \text{per } k \geq 0 . \end{cases}$$

che è la serie di Laurent richiesta convergente per $0 < |z-i| < 2$.

ESERCIZIO ($N^\circ 3$ compito B - ANALISI MAT. III del 4/11/06)

Data la funzione di variabile complessa

$$f(z) = \frac{(z-1)^2}{(z+1)^3}$$

a) determinare e classificare le singolarità di f

b) scrivere la serie di Laurent centrata in $z_0 = -1$ e calcolare $\mathrm{Res}(f;-1)$.

RISOLUZIONE

Si tratta di una funzione razionale. Il denominatore si annulla di ordine 3 in $z_0 = -1$ mentre nello stesso punto il numeratore è diverso da zero: dunque $z_0 = -1$ è un punto singolare, in particolare è un polo di ordine tre. Non vi sono altre singolarità.

Si ha

$$f(z) = \frac{((z+1)-2)^2}{(z+1)^3} = \frac{(z+1)^2 - 4(z+1) + 4}{(z+1)^3} = \frac{1}{(z+1)} - \frac{4}{(z+1)^2} + \frac{4}{(z+1)^3}$$

Quella appena trovata è la serie di Laurent centrata in $z_0 = -1$ richiesta, che ha un numero finito di termini.

In base alla definizione

$\mathrm{Res}(f;-1) = 1$, che corrisponde al coefficiente del termine $\frac{1}{z+1}$ nello sviluppo di Laurent. Dallo sviluppo si ha anche la conferma che $z_0 = -1$ è un polo di ordine tre.

ESERCIZIO (N° 3 compito A - ANALISI MAT. III del 28/11/06)

SCRIVERE LO SVILUPPO DI LAURENT DI CENTRO $z_0 = -1$ E CONVERGENTE PER OGNI $z \neq -1$ DELLA FUNZIONE

$$f(z) = \frac{z \, \mathrm{sen}(z+1)}{z+1}$$

RISOLUZIONE

Il numeratore, come prodotto di funzioni analitiche intere, è analitica intera. Il denominatore si annulla di ordine 1 in $z_0 = -1$, punto in cui anche il numeratore ha uno zero di ordine 1. Di conseguenza $z_0 = -1$ è un punto di singolarità eliminabile e la serie di Laurent di f converge su tutto il piano di Gauss (è una funzione analitica intera).

Ricordando che

$$\mathrm{sen}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}$$ convergente $\forall t \in \mathbb{C}$, si ha

$$f(z) = \frac{(z+1)-1}{z+1} \, \mathrm{sen}(z+1) = \left(1 - \frac{1}{z+1}\right) \mathrm{sen}(z+1)$$

$$= \mathrm{sen}(z+1) - \frac{\mathrm{sen}(z+1)}{z+1} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z+1)^{2n+1}}{(2n+1)!} - \frac{1}{z+1} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z+1)^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z+1)^{2n+1}}{(2n+1)!} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(z+1)^{2n}}{(2n+1)!}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z+1)^k,$$ dove

$$a_k = \begin{cases} (-1)^{n+1} \dfrac{1}{(2n+1)!} & \text{per } k = 2n \\[2ex] (-1)^n \dfrac{1}{(2n+1)!} & \text{per } k = 2n+1 \end{cases}$$

che è lo sviluppo richiesto.